பொறியியற் கணக்கு

[இரண்டாம் பாகம்]

[ENGINEERING MATHEMATICS - PART - II]

பி. ஆர். கிருஷ்ணமூர்த்தி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 562

பொறியியற் கணக்கு

(பகுதி II)

(பொறியியற் பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்

பெ. ரே. கிருட்டிணமூர்த்தி, எம்.ஏ.,
விரிவுரையாளர், கணக்கியல் துறை,
மண்டலப் பொறியியற் கல்லூரி,
திருச்சி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—January, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 562

ENGINEERING MATHEMATICS (Part II)

P. R. KRISHNAMOORTHY

Price Rs. 10-30

Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-600001.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினமூன்ருண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் சிலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்ருன 'பொறியியற் கணக்கு (பகுதி II)' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 562 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 597 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆகவின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

1. தொகை நுண்கணிதம்

(Integral Calculus)

§1. வரையறுத தொகை

வகை நுண் கணிதத்தை (Differential calculus) முதலில் கற்றபின் இப்போது தொகை நுண் கணிதத்தை (Integral calculus) கற்க முன் வந்துள்ளோம். ஆனால், உண்மையிலேயே தொகை நுண்கணிதம், வகை நுண்கணிதத்திற்கு முன் கண்டு பிடிக்கப் பட்டு, கிரேக்க கணித மேதைகளால், வட்டத்தின் பரப்பு, உருளை (cylinder), கூம்பு (cone), கோளம் (sphere) ஆகியவற்றின் கொள்ளளவு (volume) முதலியவற்றை கணக்கிடு செய்வதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டது. 17-வது நூற்றாண்டு முதல்தான் நுண் கணிதம் (calculus) விரிவாக ஆராயப்பட்டு வருகிறது. ஆனால் முதன் முதலில் வகை நுண்கணிதத்திற்கும் தொகை நுண்கணிதத் திற்கும் உள்ள மிக முக்கியமான தொடர்பை நிலை நிறுத்திய பெருமை ஆங்கிலேயரான சர் ஐசக் நியூட்டன் (Sir Isaac Newton) என்ற கணித மேதையைச் சாரும். ஜெர்மானிய மேதை லீனி (Leibnitz) என்பவரும் தனியாகக் கண்டுபிடித்தார் என்றும் அறிகிறோம். தற்போது வழங்கிவரும் $\frac{d}{dx}$ மற்றும் $\int$ ஆகிய குறி யீடுகளை (notations) லீனி பயன்படுத்தினர் என்றும் தெரிய வருகிறது.

$y = \phi(x)$ என்ற சார்பை x ஐக் குறித்து வகையீடு (differentiation) செய்து $\rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$ என்ற சார்பு கிடைக்கிறது என்றால், பழைய சார்பு $\phi(x)$ ஐ, $f(x)$ என்ற சார்பின் வரையறுத தொகை (indefinite integral) அல்லது மூலச் சார்பு (primitive) என்று கூறுகிறோம். இதை $\int f(x)\,dx = \phi(x)$ என்று குறியீடு

செய்து காட்டுகிறோம். இம்மாதிரி $\phi(x)$ போன்ற மூலச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிக்கும் முறைக்குத் தொகையிடல் செய்தல் அல்லது தொகை காணல் (process of integration) என்று பெயர். $\int f(x)\,dx$ என்பதில் வரும் $f(x)$ என்ற சார்பை தொகைச் சார்பு (integral) என்று கூறுவர்.

குறிப்பு 1 : $\int f(x)\,dx$ என்பதை $\int f(x)$ என்று எழுதுவது தவறாகும்.

ஏனென்றால், $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $dy = f(x)\,d(x)$ கிடைக்கிறது. இரு பக்கங்களிலும் $\int$ குறியிட்டால், $\int dy = \int f(x)\,dx$ ஆகும்.

ஆனால், $\int dy = y$, எனவே,

$$y = \int f(x)\,dx$$

ஆனால், $y = \phi(x)$, ஆகவே, $\varphi(x) = \int f(x)\,dx$

குறிப்பு 2 : $\int f(x)\,dx = \phi(x)$ ஆனால்

$$\frac{d}{dx}\,\varphi(x) = f(x)$$

c யாதாமொரு மாறலி (arbitrary constant) என்றால்,

$$\frac{d}{dx}\{\varphi(x) \pm c\} = \frac{d}{dx}\,\varphi(x) \pm \frac{dc}{dx}$$

$$= f(x) \pm 0 = f(x).$$

எனவே $\int f(x)\,dx = \varphi(x) \pm c$ என்றும் ஆகிறது.

(அ-து) $\int f(x)\,dx$ என்பதன் வரையறுத பொதுத் தொகை (general indefinite integral) $\varphi(x) + c$ ஆகும்.

எனவே வரையருத தொகை காணும் போது மூலச் சார்புடன் c போன்ற ஏதாவது ஒரு மாறிலியைக் கூட்ட (அல்லது கழிக்க) வேண்டும்.

§ 2. வரையருத தொகை காணும் முறைகளை விவரமாகக் கற்றுக்கொள்வோம். வரையருத தொகையின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து, வகையிடல் சூத்திரங்களை (Differentiation formulae) நன்கு அறிந்து தெளிந்தால்தான், பல சார்புகளின் தொகையிடல் செய்வது எளிது என அறியலாம். கீழ்வரும் தொகையிடல் சூத்திரங்கள் (Integration formulae), வகையிடல் சூத்திரங்களின் வழியாக கிடைத்துள்ளன. அவைகளை மனப்பாடம் செய்து கொள்வதால் மிக்க பயன் அடையலாம். அவற்றின் நிறுவல்கள் (Proofs) விளக்கப்படவில்லை. ஆனால் மேற்படி சூத்திரங்களின் வலப்பக்கத்துச் சார்புகளை வகையிடல் செய்து, இடப்பக்கத்து தொகைச் சார்பு கிடைக்கிறதா என்று கணக்கீடு செய்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

§ 3. **தொகையிடல் சூத்திரங்கள்** (Integration Formulae)

1. (அ) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ (n \neq -1)$

(ஆ) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c,$ $(n \neq -1)$

2. (அ) $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \log x + c$

(ஆ) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \int (ax+b)^{-1} dx$

$$= \frac{1}{a} \log (ax+b) + c$$

3. (அ) $\int e^x dx = e^x + c$

(ஆ) $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

4. (அ) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

(ஆ) $\int \sin (ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax+b) + c$

5. (அ) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(ஆ) $\int \cos (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax + b) + c$

6. (அ) $\int \tan x \, dx = \log \sec x + c$

(ஆ) $\int \tan (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \log \sec (ax + b) + c$

7. (அ) $\int \cot x \, dx = \log \sin x + c$

(ஆ) $\int \cot (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \log \sin (ax + b) + c$

8. (அ) $\int \sec x \, dx = \log (\sec x + \tan x) + c$

(ஆ) $\int \sec (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \log [\sec (ax + b)$

$+ \tan (ax + b) + c$

9. (அ) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log (\operatorname{cosec} x \cot x) + c$

(ஆ) $\int \operatorname{cosec} (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \log [\operatorname{cosec} (ax + b)$

$- \cot (ax + b)] + c$

10. (அ) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(ஆ) $\int \sec^2 (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan (ax + b) + c$

11. (அ) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = - \cot x + c$

(ஆ) $\int \operatorname{cosec}^2 (ax + b) \, dx = - \frac{1}{a} \cot (ax + b) + c$

12. (அ) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

(ஆ) $\int \sec (ax + b) \tan (ax + b) \, dx$

$$= \frac{1}{a} \sec (ax + b) + c$$

13. (அ) $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(ஆ) $\int \operatorname{cosec} (ax + b) \cot (ax + b) \, dx$

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{cosec} (ax + b) + c$$

14. (அ) $\int \sin h\, x \, dx = \cos h\, x + c$

(ஆ) $\int \cos h\, x \, dx = \sin h\, x + c$

(இ) $\int \sec h^2 x \, dx = \tan hx + c$

(ஈ) $\int \operatorname{cosec} h^2 x \, dx = -\cot hx + c$

(உ) $\int \sec hx \tan hx \, dx = -\sec hx + c$

(ஊ) $\int \operatorname{cosec} hx \cot hx \, dx = -\operatorname{cosec} hx + c$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{a + x}{a - x} \right) + c \; (a < x)$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x - a}{x + a} \right) + c \; (x > a)$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c = \cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c = \sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

22. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

23. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

24. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

25. (அ) $\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$

(ஆ) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x) + c$

(இ) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

§ 4. c, k, l என்பவைகள் மாறிலிகள் ஆனல், கீழ்க்கண்ட தேற்றங்கள் வெளிப்படை

$$(1)\quad \int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$(2)\quad \int [k\,f(x) + l\,\phi(x)]\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int \phi(x)\,dx$$

முதலில் எளிய சார்புகளை தொகையிடல் முறையை கீழ்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளால் அறிந்துகொள்வோம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{ax^3 + bx^2 + cx + e}{x^2}\,dx$$

$$= \int \left(ax + b + \frac{c}{x} + \frac{e}{x^2}\right) dx$$

$$= a\int x\,dx + b\int dx + c\int \frac{dx}{x} + e\int x^{-2}\,dx$$

$$= a\frac{x^2}{2} + bx + c\log x - \frac{e}{x} + K.$$ (K ஒரு மாறிலி).

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \sin\left(\frac{3}{2} - 5x\right) dx$$

$$= \frac{1}{-5}\left[-\cos\left(\frac{3}{2} - 5x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\cos\left(\frac{3}{2} - 5x\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin n} \cdot \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$= \int \frac{1 = \sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x \, dx - \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$\int \cos 4x \, . \cos 5x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (\cos 9x + \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{18} \sin 9x + \frac{1}{2} \sin x + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$$\int \cos^4 x \, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x \right] dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c.$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$$\int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \, dx = \int \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \int \left[\sec^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \right] dx$$

$$= 2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) - x + c.$$

பயிற்சி 1.

கீழ்வரும் சார்புகளை x-ஐக் குறித்து தொகையிடல் செய்க :

	விடை
1. $9x^{15}$	1. $\frac{9}{16}x^{16} + c$
2. $x^{\frac{9}{11}}$	2. $\frac{11}{20}x^{\frac{20}{11}} + c$
3. $3x^{-\frac{5}{19}}$	3. $\frac{57}{14}x^{\frac{14}{19}} + c$
4. $\frac{ax^{-3}+bx^{-2}+cx^{-1}+px+qx^2}{x^2}$	4. $-\frac{a}{4}x^{-4} - \frac{b}{3}x^{-3} - \frac{c}{2}x^{-2} + p\log x + qx + c$
5. $\frac{2x+5}{x\sqrt{x}}$	5. $4\sqrt{x} - 10x^{-\frac{1}{2}} + c$
6. $\left(x^{\frac{2}{5}} - x^{-\frac{1}{5}}\right)^2$	6. $\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - \frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}} + c$
7. $\cot^2 x$	7. $-(x + \cot x) + c$
8. $(2\tan x - 3\cot x)^2$	8. $4\tan x - 9\cot x - 25x + c$
9. $\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$	9. $\tan x - \cot x$
10. $\sin^2 x \cos^2 x$	10. $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x$
11. $\frac{1}{1+\cos x}$	11. $\operatorname{cosec} x - \cot x + c$
12. $\frac{1}{1+\sin x}$	12. $2\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + c$
13. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$	13. $x - \sin x + c$

14. $\sqrt{1+\sin 2x}$ — 14. $\sin x - \cos x + c$

15. $\sin(5x-7)$ — 15. $-\frac{1}{5}\cos(5x-7)+c$

16. $\operatorname{cosec}^2(4-9x)$ — 16. $\frac{1}{9}\cot(4-9x)+c$

17. $\tan^2(4-5x)$ — 17. $-\frac{1}{5}\tan(4-5x)-x+c$

18. $\dfrac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ — 18. $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-x$

19. $\sin n \sin 2x \sin 3x$ — 19. $-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{24}\cos 6x$
$-\frac{1}{32}\cos 4x+c$

20. $\cos 3x \sin^2 x$ — 20. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{20}\sin 5x$
$-\frac{1}{4}\sin x+c$

§5. ஏற்கெனவே, வகையிடல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி கிட்டத்தட்ட எல்லாவிதமான சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் (differential co-efficient) காணலாம் என்று அறிந்திருக்கிறோம். ஆனால் எல்லாவிதமான சார்புகளையும் தொகையிடல் செய்ய இயலாது என்பதை நாம் தெளிவாக அறிந்து கொள்ள வேண்டும். நாம் இதுவரை கற்றுணர்ந்த தொகையிடல் சூத்திரங்களைப் பயன் படுத்தி

$$\sqrt{\sin x},\quad \frac{\sin x}{x},\quad \sqrt{a^8-x^6},\quad x\sqrt{ax^4+bx^2+cx+e}$$

போன்ற எளிமைத் தோற்றங் கொண்ட சார்புகளின் தொகைகளைக் காண இயலாது. இதனால் நாம் தளர்ச்சி அடைய வேண்டிய தில்லை. நிறைய சார்புகளை, பிரதியீட்டு முறையிலோ (method of substitution) அல்லது பகுதி முறையிலோ (Integration by parts) அல்லது அடுத்தடுத்து ஒடுக்கும் முறையிலோ (successive reduction) தொகையிடல் செய்யலாம்.

§6. **பிரதியீட்டு முறையால் தொகை காணல்** (Integration by the method of substitution)

சூத்திரங்களை நேராகப் பயன்படுத்தி சில சார்புகளின் தொகைகளை முந்தைய பகுதியில் கண்டோம். சூத்திர உருவத்தில் இல்லாத சார்புகளைச் சூத்திர உருவத்தில் கொண்டுவர பிரதியீட்டு முறை (method of substitution) பயன்படுகிறது. இந்த முறையில் கொடுத்த மாறி x-என்ருல் (variable x) அதை t-என்ற மற்ருரு மாறி உள்ள சார்புக்கு மாற்றி அமைக்கிறேம். கொடுத்துள்ள தொகைச் சார்பைப் பொறுத்து, இயற்கணிதப் பிரதியீடு (algebraic substitution) அல்லது கோண விகிதப் பிரதியீடு (trigonometric substitution) செய்யவேண்டும். பின்பு t-என்ற மாறியுடன் கூடிய சார்பு கிடைக்கும். இதைத் தொகையிடல் செய்தால் t-என்ற மாறியுள்ள சார்புதான் வரும். இதைப் புரட்டுதல் பிரதியீடு (reverse substitution) மூலம் பழைய மாறி x-க்கு மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

கொடுத்துள்ள சார்புகள் x-ஐத்தான் மாறியாக உள்ளதாக இருக்கவேண்டும் என்றே அவசியமில்லை. θ, y, z ஆகவும் இருக்கலாம். அதே மாதிரி பிரதியிடும் மாறி t-ஆகவே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தம் இல்லை. u அல்லது v அல்லது z ஆக இருக்கலாம்.

§ 7. $\int f(x^n)\, x^{n-1}\, dx$ போன்றவை.

$t = x^n$ என்று பிரதியிட்டால்,

$\frac{dt}{dx} = n\, x^{n-1}$ அல்லது $dt = n\, x^{n-1}\, dx$ ஆகும்.

$$\therefore \int f(x^n)\, x^{n-1}\, dx = \int f(t) \cdot \frac{1}{n}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \int f(t)\, dt \text{ ஆகும்.}$$

பொதுவாக $\int f(t)\, dt$ என்பதை சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தித் தொகை காணலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$t = \sqrt{x}$ என்று பிரதியிட்டால், $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

எனவே $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin t \, dt$

$$= -2 \cos t$$

$$= -2 \cos \sqrt{x} + c$$

குறிப்பு : மூலச் சார்பு கண்ட பிறகு விடை எழுதும்போது c என்ற மாறிலியைச் சேர்த்தால் போதுமானது.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$$

$t = a^2 - x^3$ என்றால், $dt = -3x^2 \, dx$

$$\therefore \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt{t} = -\frac{2}{3} \sqrt{a^3 - x^3} + c$$

§ 8. $\int \phi \, [f(x)] \, . \, f'(x) \, dx$ போன்றவை

$t = f(x)$ எனப் பிரதியிட்டால், $dt = f'(x) \, dx$ எனவே $\int \phi \{ f(x) \} f'(x) \, dx = \int \phi \, (t) \, dt$ வலப்பக்க தொகைகான சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும்

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$t = 1 + x^2$ என்றால், $dt = 2x \, dx$

$$\therefore \int \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{5}{2}} \, dt$$

$$= + \frac{1}{2} . \left(-\frac{2}{3} \right) t^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} (1 + x)^{-\frac{3}{2}} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int (1 - \tan x)^5 \sec^2 x \, dx$$

$t = 1 - \tan n$ என்றால், $dt = - \sec^2 n \, dx$

$$\therefore \int (1 - \tan x)^5 \sec^2 n \, dx = - \int t^5 \, dt$$

$$= - \frac{1}{6} (1 - \tan x)^6 + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} (\sin^{-1} x)^n}$$

$t = \sin^{-1} n$ என்றால், $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} (\sin^{-1} x)^n} = \int \frac{dt}{t^n}$$

$$= - \frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}}$$

$$= - \frac{1}{n-1} \frac{1}{(\sin^{-1} x)^{n-1}} + c,$$

§ 8·1 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ மற்றும் $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$

போன்றவை § 8ன் துணைவகைகளாகும் (special cases).

$$\int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = \log f(x) \text{ மற்றும் } \int \frac{f'(x) \, dx}{\sqrt{f(x)}} = 2 \sqrt{f'(x)}$$

என்ற சூத்திரங்களை மனத்தில் கொள்க.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{x \, dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{1 + \sin 2x}{x + \sin^2 x}\, dx = \log (x + \sin^2 x) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3\, dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \sqrt{1 + x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + x^4} + c$$

பயிற்சி 2.

கீழ்வரும் சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க :

	விடை
1. $\frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$	1. $\frac{1}{2} \sin^{-1} x^2 + c$
2. $x\, e^{-x^2}$	2. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$
3. $\frac{x^2}{x^6 + 1}$	3. $\frac{1}{3} \tan^{-1} x^3 + c$
4. $x^2 \sqrt{a^3 + x^3}$	4. $\frac{2}{9} (a^3 + x^3)^{\frac{3}{2}} + c$
5. $\frac{1}{x (\log x)^n}$	5. $-\frac{n-1}{1} (\log x)^{n-1} + c$
6. $\frac{e^x}{(ae^n + b)^n}$	6. $-\frac{1}{a(n-1)(ae^x + b)^{n-1}} + c$
7. $\frac{(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	7. $\frac{2}{n+1} (1 + \sqrt{x})^{n+1} + c$
8. $\frac{1}{2 + e^x + e^{-x}}$	8. $-\frac{1}{1 + e^x} + c$

9. $\sec^2 x\,(a-\tan x)^n$ — 9. $-\frac{1}{n+1}(a-\tan x)^{n+1}+c$

10. $\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^n}$ — 10. $-\frac{1}{(n-1)(x+\sin x)^{n-1}}+c$

11. $\frac{\sec^2(\log x)}{x}$ — 11. $\tan(\log x)+c$

12. $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ — 12. $e^{\sin^2 x}+c$

13. $\frac{\cos x}{a+b\sin x}$ — 13. $\frac{1}{b}\log(a+b\sin x)+c$

14. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ — 14. $\log(\sin x-\cos x)+c$

15. $\frac{1}{1+e^{-x}}$ — 15. $\log(1+e^x)+c$

16. $\frac{1}{1+e^x}$ — 16. $\log(1+e^{-x})+c$

17. $\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ — 17. $\frac{1}{2(b^2-a^2)}\log(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)$

18. $\frac{1}{\sin x\cos^5 x}$ — 18. $\log\tan x+\tan^2 x+\frac{1}{4}\tan^4 x\,c$

19. $\frac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^n}\ (n>0)$ — 19. $\frac{1}{n(\sec x+\tan x)^n}+c$

20. $\frac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^n}\ (n>1)$ — 20. $\frac{-\{(n+1)t^2+n-1\}}{2(n^2-1)t^{n+1}}+c$

(இங்கு $t=\sec x+\tan x$)

21. $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\sin^{-1}x}}$ — 21. $2\sqrt{\sin^{-1}x}+c$

22. $\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+7}}$ — 22. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+7}+c$

23. $\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ — 23. $\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+c$

24.	$\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$	24.	$2 \log (e^x + 1) - x + c$
25.	$\dfrac{\tan x}{\log \sec x}$	25.	$\log (\log \sec x) + c$
26.	$\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$	26.	$2\sqrt{\tan x} + c$
27.	$\dfrac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}$	27.	$\dfrac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$
28.	$\dfrac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}$	28.	$\dfrac{2}{5}(5+\tan^2 x)\sqrt{\tan x} + c$

§ 9-1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ **போன்றவை**

$a > 0$ ஆனால், $ax^2 + bx + c \equiv a[(x \pm \alpha)^2 \pm \beta^2]$ என்ற உருவத்தில் மாற்றி எழுத முடியும்.

$$\therefore \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x \pm \alpha)^2 \pm \beta^2}$$

இதைத் தொகையிட §3-ல் சூத்திரம் (16) அல்லது (17) ஐப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\beta} \tan^{-1}\left(\frac{x \pm \alpha}{\beta}\right) \text{ அல்லது } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\beta} \log \left\{ \frac{(x \pm \alpha) - \beta}{(x \pm \alpha) + \beta} \right\}$$

என்று தொகை மதிப்பு கிடைக்கும்.

$a < 0$ ஆனால், $\displaystyle\int \frac{dx}{bx + c - Ax^2} \quad \begin{matrix}(A > 0)\\(a = -A)\end{matrix}$ என்பதை

$\displaystyle\frac{1}{a} \int \frac{dx}{\beta^2 - (x \pm \alpha)^2}$ என்ற உருவத்தில் மாற்றியமைக்க முடியும். இதைத் தொகையிடல் செய்தால் (§3, சூத்திரம் 15)

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\beta} \log \left\{ \frac{\beta + (x \pm \alpha)}{\beta - (x \pm \alpha)} \right\}$$

என்ற விடை கிடைக்கும்.

குறிப்பு : மேற்படி விடைகளை நினைவில் கொள்ள வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 5}$$

இங்கே $2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right)$

$$= 2\left[x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{9}{10} - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{4}} \log \left\{ \frac{x + \frac{3}{4} - \frac{7}{4}}{x + \frac{3}{4} + \frac{7}{4}} \right\}$$

$$= \frac{1}{7} \log\left(\frac{2x - 2}{2x + 5}\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{dx}{10 - 4x - 3x^2}$$

இங்கே $10 - 4x - 3x^2 = -3\left[x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}\right]$

$$= -3\left[x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} - \frac{10}{3}\right]$$

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{3}\right)^2\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{34}}{3}\right)^2 - \left(x+\frac{2}{3}\right)^2\right].$$

$$\therefore \int \frac{dx}{10-4x-3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{34}}{3}\right)^2 - \left(x+\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{34}}{3}}$$

$$\log\left\{\frac{\frac{\sqrt{34}}{3} + \left(x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{34}}{3} - \left(x+\frac{2}{3}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{34}}\log\left(\frac{\sqrt{34}+2+3x}{\sqrt{34}-2-3x}\right) + c$$

§ 9·2 $\int \frac{(lx+m)\,dx}{ax^2+bx+c}$ போன்றவை.

தொகைச் சார்பை இரண்டு பகுதிகளாக, கீழ்க்கண்ட முறையில் பிரித்தால், தொகையிடல் எளிதாகி விடும்.

விதி (Rule):

$lx+m \equiv A\,(ax^2+bx+c$-ன் வகைக்கெழு$) + B$ (அ-து) $lx+m \equiv A\,(2ax+b)+B$, என்போம். இரு பக்கங்களிலும், x-ன் குணகங்களையும், மாறிலிகளையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், A. B ஆகியவற்றின் மதிப்பு தெரியும்.

$$\therefore \int \frac{(lx+m)\,dx}{ax^2+bx+c} = A\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + B\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= A\log(ax^2+bx+c) + B\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

வலப்பக்கத்து தொகை காண § 9·1-ல் கூறப்பட்ட முறையைக் கையாள வேண்டும்.

குறிப்பு : $ax^2 + bx + c$ என்பதை $a(x+\alpha)(x+\beta)$ என காரணிகளாக எழுத முடிந்தால், $\dfrac{lx+m}{a(x+\alpha)(x+\beta)}$ என்பதை பகுதிப் பின்னங்களாகப் (partial fractions) பிரித்து தொகையிடல் செய்ய முடியும். இதை அடுத்த பகுதியில் காண்போம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+14x+58}$$

$3x + 1 \equiv A(2x+14) + B$ என்போம்.

x-ன் குணகத்தை ஒப்பிட்டால்,

$$3 = 2A \qquad \therefore \quad A = \frac{3}{2}$$

மாறிலிகளை ஒப்பிட்டால்,

$$1 = 14A + B \qquad \therefore \quad B = -20$$

$$\therefore \quad 3x + 1 \equiv \frac{3}{2}(2x+14) - 20$$

$$\therefore \quad \int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+14x+58} = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+14)\,dx}{x^2+14x+58} - 20\int \frac{dx}{x^2+14x+58}$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2+14x+58) - 20\int \frac{dx}{(x+7)^2+3^2}$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2+14x+58) - \frac{20}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+7}{3}\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{1-x-x^2}{1+x-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1-x-x^2}{1+x-x^2}\,dx = \int \frac{1+x-x^2-2x}{1+x-x^2}\,dx$$

$$= \int \left\{ 1 - \frac{2x}{1 + x - x^2} \right\} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{2x\, dx}{1 + x - x^2}$$

$2x \equiv A\,(1 - 2x) + B$ என்போம்.

$$\therefore \quad 2 = -2A \qquad \therefore \quad A = -1$$

$$0 = A + B \qquad \therefore \quad B = 1$$

$$\therefore \quad \int \frac{1 - x - x^2}{1 + x - x^2}\, dx = x - \left\{ -\int \frac{(1 - 2x)\, dx}{1 + x - x^2} + \int \frac{dx}{1 + x - x^2} \right\}$$

$$= x + \log\,(1 + x - x^2) - \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= x + \log\,(1 + x - x^2) - \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left\{ \frac{\sqrt{5} - 1 + 2x}{\sqrt{5} + 1 - 2x} \right\} + c$$

பயிற்சி 3.

கீழ்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க.

	விடை
1. $\dfrac{1}{3x^2 + 18x - 10}$	1. $\dfrac{1}{17} \log \left(\dfrac{3x - 23}{3x + 15} \right) + c$
2. $\dfrac{1}{4x^2 - 4x + 2}$	2. $\dfrac{1}{2} \tan^{-1} (2x - 1) + c$
3. $\dfrac{1}{4 + 5x - x^2}$	3. $\dfrac{1}{\sqrt{41}} \log \left\{ \dfrac{\sqrt{41} + 2x - 5}{\sqrt{41} - 2x + 5} \right\} + c$
4. $\dfrac{1}{e^x + 2e^{-x} - 3}$	4. $\log \left(\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} \right) + c$

5. $\dfrac{1}{6x - 7 - x^2}$ 5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(\dfrac{\sqrt{2} + x - 3}{\sqrt{2} - x + 3}\right) + c$

6. $\dfrac{1}{1 + x - x^2}$ 6. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\dfrac{\sqrt{5} + 2x - 1}{\sqrt{5} - 2x + 1}\right) + c$

7. $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$ 7. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{3}x} - \dfrac{1}{4} \log\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) + c$

[7-வது கணக்கு முழுவதுமாகக் கீழே செய்யப்படுகிறது]

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + x^2 + 1}\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2 + 1)\,dx}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2 - 1)\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

அ - து $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

என்போம்.

இப்போது $I_1 = \displaystyle\int \frac{(x^2 + 1)\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$

$$= \int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3}$$

இதில் $t = x - \dfrac{1}{x}$ எனப் பிரதியிடு

$$dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\therefore \quad I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}\, x}\right)$$

மேலும், $I_2 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}$

$$= \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}$$

இதில் $t = x + \frac{1}{x}$ என்றால், $dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\therefore \quad I_2 = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \frac{t - 1}{t + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)$$

I_1, I_2 இவைகளை சமன்பாடு (1)-ல் இட்டால்,

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}\, x}\right) - \frac{1}{4} \log\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) + c$$

விடை

8. $\dfrac{5x + 7}{6x^2 + 4x - 1}$

8. $\dfrac{5}{12} \log(6x^2 + 4x - 1) + \dfrac{8}{3\sqrt{10}} \log\left(\dfrac{3\sqrt{2}\,x + \sqrt{2} - \sqrt{5}}{3\sqrt{2}\,x + \sqrt{2} + \sqrt{5}}\right) + c$

9. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+5}$

9. $\log(x^2+2x+5)+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+c$

10. $\dfrac{5x+1}{x^2-2x-35}$

10. $\dfrac{5}{2}\log(x^2-2x-35)+\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{x-7}{x+5}\right)+c$

11. $\dfrac{x+4}{6x-7-x^2}$

11. $-\dfrac{1}{2}\log(6x-7-x^2)+\dfrac{7}{2\sqrt{2}}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}+x-3}{\sqrt{2}-x+3}\right)+c$

12. $\dfrac{x^2}{x^6+2x^3+2}$ 12. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}(x^3+1)+c$

13. $\dfrac{x^3}{4+2x^4-x^8}$ 13. $\dfrac{1}{8\sqrt{5}}\log\left(\dfrac{\sqrt{5}+x^4-1}{\sqrt{5}-x^4+1}\right)+c$

14. $\dfrac{x^2-x+1}{1-x-x^2}$

14. $-x+\log(1-x-x^2)-2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

15. $\dfrac{x^3}{x^2-2x+2}$

15. $\dfrac{x^2}{2}-2x+\log(x^2-2x+2)-2\tan^{-1}(x-1)+c$

16. $\dfrac{x^2+2}{x^4-1}$ (BETO)

16. $\dfrac{3}{4}\log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

17. $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ (BE '65)

17. $\dfrac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

18. $\dfrac{3x+2}{x^2-x+1}$ (B. Tech. '72)

18. $\dfrac{3}{2}\log(x^2-x+1)+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

19. $\dfrac{1}{2\cosh x+\sinh x}$ (B.E. '72)

19. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}\,e^x)+c$

§10. பகுதிப் பின்ன முறையால் தொகையிடல் (Integration by Partial Fractions)

ஒரு விகிதமுறு பின்னச் சார்பில் (Rational fractions) அதன் பகுதி காரணிகளாக்கப்படுமானால், மேற்படி சார்பைப் பகுதிப் பின்னங்களாக (partial fractions) மாற்றி ஒவ்வொரு பகுதிப் பின்னத்தையும் தனித்தனியே தொகையிடல் செய்யலாம். மேற்படி காரணிகளின் (factors) படித்தரம் (degree) 1 அல்லது 2 ஆனால். தொகையிடல் எளிது. அதற்கு மேம்பட்டால் தொகையிடல் சிறிது கடினம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$$

$$x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)$$

$$\therefore\ \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$ என்போம்.

(அ - து) $x^2+x-1\equiv A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$

இதில், $x=0,\ 2,-3$ என அடுத்தடுத்து பிரதியீடு

$$-1=A(0-2)(0+3)+0+0\quad\therefore A=\frac{1}{6}$$

$$4+2-1=0+B\,.\,2(2+3)+0\qquad\therefore B=\frac{1}{2}$$

$$9 - 3 - 1 = 0 + 0 + c(-3)(-3-2) \quad \therefore C = \frac{1}{3}.$$

எனவே $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}$

$$= \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(x-2) + \frac{1}{3}\log(x+3) + c.$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

தொகைச் சார்பின் பகுதியில் (denominator) (x^2+4) என்ற காரணியை 1-ம் படித் தரமுடைய இரு காரணிகளாகப் பிரிக்க முடியாது. ஆகையால் அதை அப்படியே வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

என்போம்.

$$\therefore \quad x \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)$$

இதில் $x = 1$ என்று இரு பக்கங்களிலும் பிரதியிட்டால்,

$$1 = A(1^2+4) + 0 \qquad \therefore \quad A = \frac{1}{5}$$

x^2-ன் குணகத்தை இரு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டால்,

$$0 = A + B \qquad \therefore \quad B = -\frac{1}{5}$$

அதேபோல் x-ன் குணகத்தை ஒப்பிட்டால்,

$$1 = C - B \qquad \therefore \quad C = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}\right)dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{10}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{5}\log(x-1) - \frac{1}{10}\log(x^2+4) + \frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x+1)^2(2x+1)}$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(2x+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{2x+1}$$

என்போம்.

அ-து $2x+3 \equiv A(x+1)(2x+1) + B(2x+1) + c(x+1)^2$

இதில் $x = -1, -\frac{1}{2}$ என அடுத்தடுத்து பிரதியிட்டால்,

$$-2+3 = -B \qquad \therefore \quad B = -1$$

$$-1+3 = C\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad C = 8$$

இரு பக்கங்களிலும் x^2-ன் குணகங்களை ஒப்பிடு

$$0 = 2A + C \qquad \therefore \quad A = -4$$

$$\therefore \int \frac{(2x+3)\,dx}{(x+1)^2(2x+1)} = -4\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 8\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$= -4\log(x+1) + \frac{1}{x+1} + 4\log(2x+1) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^2 - 3x + 2}$$

தொகைச் சார்பின் தொகுதிப் படித்தரம் (degree of numerator) பகுதிப் படித்தரத்தைப்போல் சமமாகவோ அல்லது அதைவிட கூடுதலாகவோ இருந்தால், தொகுதியை பகுதிகொண்டு வகுத்து, பிறகு கிடைக்கும் தகு பின்னத்தை (proper fraction) பகுதி பின்னமாக (partial fraction) மாற்றி, அதன்பின் தொகையிடல் வேண்டும்.

இந்தக் கணக்கில் தொகுதியின் படித்தரம் பகுதியின் படித்தரத்தைவிட 1 படி கூடுதல்

$$\frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 6}{(x-2)(x-1)}$$

$$= x + 3 + \frac{8}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\therefore \int \frac{x^3\,dx}{x^2 - 3x + 2} = \int (x+3)\,dx + 8\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 8\log(x-2) - \log(x-1) + c$$

பயிற்சி 4.

கீழ்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க.

1. $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

2. $\dfrac{1}{1 - 5x + 6x^2}$ B.E. '66

3. $\dfrac{2x + 3}{(2x + 1)(1 - 3x)}$

4. $\dfrac{x^2 + 11x + 14}{(x + 3)(x^2 - 4)}$

5. $\dfrac{x^2}{(x + 2)^2 (x + 1)}$

6. $\dfrac{x + 3}{(x - 1)(x - 2)^2}$ (B. Tech. '68)

7. $\dfrac{7x - 4}{(x - 1)^2 (x + 2)}$ (B.E '51)

8. $\dfrac{2x - 3}{x^2 (x^2 - 1)}$ (B.E. '72)

9. $\dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}$ (B.E. '63 Annamalai)

10. $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

11. $\dfrac{x+1}{x^2(x^2+1)}$ (B.E. '61)

12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+2)}$ (B.E. '63)

13. $\dfrac{x}{x^4+a^4}$

14. $\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

15. $\dfrac{2\cos x}{(7+\sin x)(3+\sin x)}$ (B.Tech. '72)

16. $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$

17. $\dfrac{1}{x^4+1}$

18. $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$ (B.E. '57, '62)

19. $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ (B.E. '48)

20. $\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$

21. $\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$

விடைகள்

1. $\dfrac{1}{(b-a)(c-a)}\log(x+a)+\dfrac{1}{(c-b)(a-b)}\log(x+b)$

$$+\frac{1}{(a-c)(a-b)}\log(x+c)+K$$

2. $\log\left(\dfrac{1-2x}{1-3x}\right)+c$

3. $\dfrac{2}{5}\log(2x+1)-\dfrac{11}{15}\log(1-3x)+c$

4. $\log\left\{\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x+3)^2}\right\}+c$

5. $\dfrac{4}{x+2}+\log(x+1)+c$

6. $4\log\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)-\dfrac{5}{x-2}+c$

7. $2 \log\left(\frac{x-1}{x+2}\right) - \frac{1}{x-1} + c$

8. $\frac{5}{2} \log(x+1) - 2\log x - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{3}{x} + c$

9. $2\log(x-1) - \log(x^2+1) - \tan^{-1} x + c$

10. $5 \log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right) + c$

11. $\log x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) \tan^{-1} x + c$

12. $\frac{1}{3}\log(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\log(x^2+2)$

$- \frac{1}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$

13. $\frac{1}{2a^2} \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + c$

14. $\log\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right) + c$

15. $\frac{1}{2} \log\left(\frac{3+\sin x}{7+\sin x}\right) + c$

16. $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x} + c$

17. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right) + c$

18. $\frac{1}{4} \log\left(\frac{x^4-1}{x^4}\right) + c$

19. $\frac{1}{n} \log\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right) + c$

20. $\frac{1}{6}\log(1-\cos x)+\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$

$$-\frac{2}{3}\log(1+2\cos x)+c$$

21. $e^x+\log(e^x-1)+c$

குறிப்பு (20)-ம் கணக்கு

$$\left[\frac{1}{\sin x+\sin 2x}=\frac{1}{\sin x+2\sin x\cos x}\right.$$

$$\left.=\frac{\sin x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}=\frac{\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)(1+2\cos x)}\right]$$

§ 11.1 $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ போன்றவை.

$ax^2+bx+c\equiv\sqrt{a}\;\sqrt{\pm x^2\pm A^2}$ என்ற உருவத்தில் கொண்டு வந்த பின்பு, § 3-ல் உள்ள சூத்திரங்களில் (18), (19) அல்லது (20) ஐப் பயன்படுத்தி தொகைக் காணல் எளிதாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$$

$$3+2x-5x^2=-5\left[x^2-\frac{2x}{5}-\frac{3}{5}\right]$$

$$=-5\left[\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{16}{25}\right]$$

$$=5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2\right]$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sin^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sin^{-1} \left(\frac{5x - 1}{4} \right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1^2 + (x^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} (x^2) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x - 2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh^{-1} \left(\frac{6x + 1}{5} \right) + c$$

§ 11·2. $\int \frac{(lx + m)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **போன்றவை.**

தொகைச் சார்பில் உள்ள தொகுதியை இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம். முதல் பாகம் $ax^2 + bx + c$-ன் வகைக்கெழுவைக் கொண்டதாகவும் (differential coefficient), மற்றைய பாகம் மாறிலியைக் (constant) கொண்டதாகவும் அமைக்க வேண்டும்.

அ - து $lx + m \equiv A(2ax + b) + B.$

x-ன் குணகம், மாறிலி இவைகளை இரு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து A, B-களின் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\int \frac{(lx+m)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = A\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= A\cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

வலப்பக்கத்துத் தொகை காண § 11.1-ஐப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{2x^2-7x+5}}$$

$2x-3 \equiv A(4x-7)+B$ என்போம்

$$2 = 4A \qquad \therefore\ A = \frac{1}{2}$$

$$-3 = -7A + B \qquad \therefore\ B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \int \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{2x^2-7x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{(4x-7)\,dx}{\sqrt{2x^2-7x+5}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+5}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x^2-7x+5} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{2x^2-7x+5} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cosh^{-1}\left(\frac{4x-7}{3}\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2

$$\int \sqrt{\frac{3-2x}{1-x}}\, dx$$

$$\int \sqrt{\frac{3-2x}{1-x}}\, dx = \int \sqrt{\frac{3-2x}{1-x}} \sqrt{\frac{3-2x}{3-2x}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{3-2x}{\sqrt{2x^2-5x+3}}}$$

$3 - 2x \equiv A(4x-5) + B$ என்போம்.

$$-2 = 4 \qquad \therefore \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$3 = -5A + B \qquad \therefore \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{\frac{3-2x}{1-x}}\, dx = dx - \frac{1}{2}\int \frac{(4x-5)\, dx}{\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x^2-7x+5}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= -\sqrt{2x^2-5x+3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^{-1}(4x-5) + c$$

பயிற்சி 5.

தொகை காண்க :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x+x^2}}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+x)}}$

5. $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{9 + \tan^2 x}}$

6. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{5x - 6 - x^2}}$ (Part time B.E. '72)

8. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$ (B. Tech. '69)

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x + 2x^2}}$ (B. E. '72)

10. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$ (B. E. '65 Osmania)

11. $\dfrac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 2}}$

12. $\dfrac{6x + 5}{\sqrt{6 + x - 2x^2}}$

13. $\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

14. $\dfrac{1 - 4x}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$

15. $\dfrac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x - 3}}$

16. $\dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ (B. Tech. '72)

17. $\dfrac{1 + x}{\sqrt{2x^2 + 7x + 3}}$ (B. Tech. '71)

18. $\dfrac{3x - 1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$ (B. Tech. '68)

19. $\dfrac{x}{(3x^2 + x + 5)^{\frac{1}{2}}}$ (B. E. '71)

விடைகள்.

1. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x - 3}{\sqrt{41}}\right) + c$

2. $\log\left[x - \dfrac{2}{3} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} + c\right]$

3. $\sin^{-1}\left(\dfrac{x - a}{a}\right) + c$

4. $-2\sin^{-1}\left(\dfrac{\beta - x}{\beta - \alpha}\right) + c$

5. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan x\right)+c$

6. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sin x\right)+c$

7. $\sin^{-1}(2x-5)+c$

8. $\sin h^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+c$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin h^{-1}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)+c$

10. $\sqrt{x^2+4x+3}-2\log\{x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\}+c$

11. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2-4x+2}+\frac{16}{5\sqrt{5}}\log\left\{x-\frac{2}{5}\right.$

$$\left.+\sqrt{x^2-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}}\right\}+c$$

12. $-3\sqrt{6+x-2x^2}+\frac{13}{2\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{7}\right)+c$

13. $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

14. $-4\sqrt{x^2-2x+4}-3\sin h^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

15. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+x-3}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\cos h^{-1}\left(\frac{4x+1}{5}\right)+c$

16. $2\sqrt{x^2+2x+5}-\sin h^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

17. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+7x+3}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\cos h^{-1}\left(\frac{4x+7}{5}\right)+c$

18. $-3\sqrt{1+2x-x^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+c$

19. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+5}-\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin h^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{59}}\right)+c$

§ **12.** (அ) $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

(ஆ) $\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ **போன்றவை**

(அ) $\sqrt{ax^2+bx+c}$ என்பதை $\sqrt{a}\ \sqrt{(\pm x\pm\alpha)^2+\beta^2}$ என்ற உருவத்தில் மாற்றியமைத்து, சூத்திரங்கள் (22 முதல் 24, § 3) பயன்படுத்தி தொகையிடல் செய்யலாம்.

(ஆ) $px+q=A$ (ax^2+bx+c-ன் வகைக்கெழு) $+B$ என்று இட்டு, A, B ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

பின்பு

$$\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=\int\{A(2ax+b)+B\}\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=A\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$+B\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

வலப்பக்கத்து முதல் தொகை காண,

$t=ax^2+bx+c$ என்று பிரதியிடு.

அது, $A\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$ என வந்து

$$\frac{2A}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{2A}{3}(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}$$

எனக் கொடுக்கும்.

இரண்டாவது தொகை காண, அதை $\sqrt{a}\ \sqrt{(\pm x\pm\alpha)^2\pm\beta^2}$ என உருவ மாற்றியமைத்து (அ) முறையில் தொகையிடலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$$

$$3 - 2x - x^2 = 2^2 - (x + 1)^2$$

$$\therefore \int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{2^2 - (x + 1)^2}\, dx$$

$$= \frac{x + 1}{2} \sqrt{2^2 + (x + 1)^2} + \frac{2^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right)$$

$$= \frac{x + 1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + 2 \sin^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 8}\, dx$$

$x - 1 \equiv A\,(2x + 2) + B$ என்றால்

$A = \frac{1}{2}$, $B = -2$ ஆகும்.

$$\therefore \int (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 8}\, dx = \int \frac{1}{2} \{ (2x + 2) - 2 \} \sqrt{x^2 + 2x - 8}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{ (2x+2) \sqrt{x^2 + 2x - 8} \}\, dx - 2 \int \sqrt{x^2 + 2x - 8}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}}\, dt - 2 \int \sqrt{(x + 1)^2 - 3^2}\, dx$$

$$(t = x^2 + 2x - 8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2 \left\{ \frac{x + 1}{2} \sqrt{(x + 1)^2 - 3^2} - \frac{3^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x + 1}{3} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + 2x - 8)^{\frac{3}{2}} - (x + 1) \sqrt{x^2 + 2x - 8} + 9 \cosh^{-1}\left(\frac{x + 1}{3}\right) + c$$

பயிற்சி 6.

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க.

1. $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$

2. $\sqrt{x^2 + 2x + 10}$

3. $\sqrt{x(1 - x)}$ (B. E. '52)

4. $x\sqrt{x^2 + x + 1}$

5. $(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3}$

6. $x\sqrt{x^2 + 6x + 109}$

7. $(3x - 2)\sqrt{x^2 + x + 1}$

விடைகள்.

1. $\frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 2\cos^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c$

2. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 10} + \frac{9}{2}\sin h^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$

3. $\frac{2x - 1}{4}\sqrt{x - x^2} + \frac{1}{8}\sin^{-1}(2x - 1) + c$

4. $\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2x+1}{8}\sqrt{x^2 + x + 1}$
$- \frac{3}{16}\sin h^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$

5. $\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 3)^{\frac{3}{2}} + c$

6. $\frac{1}{3}(x^2+6x+109)^{\frac{3}{2}} - \frac{3(x+3)}{2}\sqrt{x^2 + 6x + 109}$
$- 150\sin h^{-1}\left(\frac{x+3}{10}\right)$

7. $(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{8}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$
$- \frac{21}{16}\sin h^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

§ 13. $\int f(x)\sqrt{ax+b}\,dx$, $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax+b}}$ போன்றவை.

இங்கே $f(x)$ என்பது இயற்கணித சார்பு (algebraic function) ஒன்றைக் குறிக்கும்.

$t = \sqrt{ax+b}$ அல்லது $t^2 = ax+b$ என்று பிரதியிட்டால், வர்க்கமூலம் இல்லாத t மாறியாக உள்ள மற்றொரு இயற்கணித சார்பு கிடைக்கும். அதை முன்பு விளக்கிய பல வழிகளில் ஏதாவது ஒன்றைப் பயன்படுத்தித் தொகை காணலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{\sqrt{x+2}} \quad \text{(B. E. '65 S. V. University)}$$

$t = \sqrt{x+2}$ என்றால், $2dt = \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ஆகும்.

மேலும் $x+2 = t^2 \quad \therefore \quad 4x+1 = 4t^2 - 7.$

$$\therefore \int \frac{(4x+1)\,dx}{\sqrt{x+2}} = \int (4t^2-7)\,2\,dt$$

$$= \frac{8t^3}{3} - 14t$$

$$= \frac{2t}{3}(4t^2-21)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+2}\,[4(x+2)-21]$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+2}\,(4x-13)+c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx$$

$t^2 = ax+b$ என்றால், $2t\,dt = a\,dx$

மேலும் $x = \frac{1}{a}(t^2-b)$

$$\therefore \int x^2 \sqrt{ax+b}\, dx = \int \frac{1}{a^2} (t^2 - b)^2\, t \cdot \frac{2t\, dt}{a}$$

$$= \frac{2}{a^3} \int t^2 (t^4 - 2b\, t^2 + b^2)\, dt$$

$$= \frac{2}{a^3} \int (t^6 - 2b\, t^4 + b^2\, t^2)\, dt$$

$$= \frac{2}{a^3} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2b\, t^5}{5} + \frac{b^2\, t^2}{3} \right)$$

$$= \frac{2t^3}{105a^3} (15t^4 - 42bt^2 + 35b^2)$$

$$= \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{105a^3} [15(ax+b)^2 - 42b(ax+b) + 35b^2]$$

$$= \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{105a^3} (15a^2 x^2 - 12abx + 8b^2) + c$$

பயிற்சி 7.

தொகையிடல் செய்க.

1. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}$ 2. $(x+7)\sqrt{x+4}$

3. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x+4}}$ (B.Tech. '72) 4. $\dfrac{\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}$

5. $\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}}$ (B. Tech. '70)

6. $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ 7. $\sqrt{e^x - 1}$ (B.Tech. '70)

8. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$ 9. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x+1}}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^3}$

11. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$

விடைகள்.

1. $\frac{1}{6}\sqrt{x+2}\,(3x^2-4x+28)+c$

2. $2\sqrt{x+4}\left\{\frac{(x+4)^2}{5}+x+4\right\}+c$

3. $2\sqrt{x+4}\left\{\frac{(x+4)^2}{5}-\frac{8(x+4)}{3}+16\right\}+c$

4. $x-2a\sqrt{x}+2a^2\log(a+\sqrt{x})+c$

5. $\log\{2x+1+2\sqrt{2x-1}\}-2\tan^{-1}(1+\sqrt{2x-1})+c$

6. $\log\left\{\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right\}+c$

7. $2\sqrt{e^x-1}-2\tan^{-1}(\sqrt{e^x-1})+c$

8. $2\sqrt{1+x}+\log\left\{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right\}+c$

9. $\log\left\{\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right\}-\left\{\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\right\}+c$

10. $2\tan^{-1}\sqrt{1+x}+c$

11. $\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+c$

§ 14. $\int\frac{dx}{(lx+m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ போன்றவை

$\frac{1}{t}=lx+m$ என்று பிரதியிட்டால், மேற்படி தொகை $\int\frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+c}}$ என்ற உருவம் பெறும். இதன் தொகை காண § 9·1 முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$$\frac{1}{t} = x - 1 \text{ என்றால், } -\frac{1}{t^2}\, dt = dx$$

$$x = \frac{1}{t} + 1 \qquad \therefore \quad x^2 + 2x - 8 = \left(\frac{1}{t} + 1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t} + 1\right) - 8$$

$$= \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t} - 5$$

$$= \frac{1+4t-5t^2}{t^2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-8}} = \int \frac{-dt/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+4t-5t^2}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t-5t^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(t-\frac{2}{5}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin^{-1}\left(\frac{5t-2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin^{-1}\left(\frac{\frac{5}{x-1} - 2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin^{-1}\left(\frac{7-2x}{3x-3}\right) + c$$

பயிற்சி 8.

அடியில் கண்ட சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க.

1. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

2. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+6x+109}}$

3. $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x-x^2}}$ (B. E. '61)

4. $\dfrac{1}{x\sqrt{5x^2+2x+1}}$ (B. E. '55)

5. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{2x^2-4x+10}}$ (B. E. '63 Annamalai)

6. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+9}}$ (B. Tech. '70)

7. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$ (B. E. '54)

விடைகள்.

1. $-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+c$

2. $-\dfrac{1}{\sqrt{109}}\sinh^{-1}\left(\dfrac{109+3x}{10x}\right)+c$

3. $-\log\left\{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x-x^2}\right\}+c$

4. $-\log\left\{\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{1}{x}\sqrt{1+2x+8x^2}\right\}+c$

5. $-\dfrac{1}{\sqrt{8}}\log\left\{\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{\dfrac{1}{x+1)^2}+\dfrac{1}{4}}\right\}+c$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cosh^{-1}\left(\dfrac{9-x}{3x+3}\right)+c$

7. $-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

§ 15. $\int \frac{dx}{(lx^2 + m)\sqrt{ax^2 + b}}$ போன்றவை.

விதி (Rule): $\frac{1}{t} = x$ என்று பிரதியிடு. பிறகு மற்றொரு பிரதியிட்டு $\sqrt{}$ அடையாளம் நீங்குமாறு செய்து கொள். பின்பு தொகையிடல் எளிது. கீழ்வரும் மாதிரி கணக்குகளை ஊன்றி கவனிக்கவும்.

மாதிரிக் கணக்கு :

$$\int \frac{dx}{(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$\frac{1}{t} = x$ என்றால், $-\frac{1}{t^2}\, dt = dx$ ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{dx}{(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{-dt/t^2}{\left(1 - \frac{2}{t^2}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}}$$

$$= \int \frac{-t\, dt}{(t^2 - 2)\sqrt{t^2 - 1}}$$

இதில் $u = \sqrt{t^2 - 1}$ என்று பிரதியிடு $t^2 = u^2 + 1$

$$du = \frac{2t\, dt}{2\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{-du}{u^2 - 1}$$

$$= \int \frac{du}{1^2 - u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log\left\{\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}{1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x - \sqrt{1 - x^2}}\right) + c$$

பயிற்சி 9.

தொகை காண்க :

1. $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$ 2. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

3. $\dfrac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

விடைகள்.

1. $-\tan^{-1}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)+c$

2. $-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+c$

3. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+(\sqrt{2}-1)x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+(\sqrt{2}+1)x}\right\}+c$

§ 16. $\displaystyle\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\pm x^2\pm a^2}}$, $\displaystyle\int f(x)\sqrt{\pm x^2\pm a^2}\,dx$ போன்றவை

மேற்படி தொகைகளில் வரும் வர்க்க மூலங்களை நீக்க, கீழ்க கண்ட கோணக்கணித பிரதியீடுகள் பயன் பெறும். $\sqrt{a^2-x^2}$-க்கு, $x=a\sin\theta$ அல்லது $a\cos\theta$ என்றும் $\sqrt{x^2+a^2}$-க்கு, $x=a\tan\theta$ அல்லது $a\cot\theta$ என்றும் $\sqrt{x^2-a^2}$-க்கு, $x=a\sec\theta$ அல்லது $a\cos\theta$ என்றும் பிரதியிடல் வேண்டும். மாதிரிக் கணக்குகளை நன்கு கவனித்தால் முறை தெளிவாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$ (B. E. '63 S. V. University)

$x=3\sec\theta$ என்றால், $dx=3\sec\theta\tan\theta$ ஆகும்.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{27\sec^3\theta\cdot 3\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{27} \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{27} \int \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{54} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{54} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$= \frac{1}{54} (\theta + \sin\theta \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{54} \left[\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \right] + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$x = \tan\theta$ என்று பிரதியிட்டால், $dx = \sec^2\theta \, d\theta$

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\tan\theta \cdot \sec^2\theta \, d\theta}{\sec^3\theta} = \int \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + c$$

பயிற்சி 10.

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க :

1. $\dfrac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

2. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

(B. E. '54, '62)

3. $\dfrac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$

5. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

6. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

(B. E. '64 S. V. University)

7. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$

விடைகள்.

1. $-\cot\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}x\right)+c$

2. $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

3. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$

4. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

5. $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

6. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\cosh^{-1}x+c$

7. $\sqrt{x^2-a^2}-a\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+c$

§ 17. $\int\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx$, $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$

$\int\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta+x}}\,dx$ போன்றவை

மேலே கண்ட தொகைச் சார்புகளை முறையே

$$\sqrt{B^2-(x+A)^2},\ \frac{1}{\sqrt{B^2-(x+A)^2}},\ \frac{2-\alpha}{\sqrt{B^2-(x+A)^2}}$$

என்ற உருவங்களில் கொண்டுவந்து, முன்பு விளக்கியுள்ள முறைகளால் தொகையிடலாம். இருந்தாலும், $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$ என்று பிரதியிட்டும் தொகையிடலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \sqrt{(x+1)\ (4-x)}\ dx$$

$$x = -\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta\sin\theta + 8\sin\theta\cos\theta = 10\sin\theta\cos\theta$$

$$x + 1 = 1 - \cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 5\sin^2\theta$$

$$4 - x = 4 + \cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 5\cos^2\theta.$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{(x+1)(4-x)}\ dx$$

$$= \int \sqrt{5\sin^2\theta \cdot 5\cos^2\theta} \cdot 10\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 50\int \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int (1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int (1-\cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]$$

ஆனல் $x = -\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = -(1-\sin^2\theta) + 4\sin^2\theta = 5\sin^2\theta - 1.$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \frac{x+1}{5}\ (\text{அ-து}),\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \int \sqrt{(x+1)(4-x)}\, dx = \frac{25}{16}\left[4 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{5}} - \sin\left\{4 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{5}}\right\}\right] + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx$$

$x = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta$ என்றால்

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$x - 1 = -1 + \cos^2\theta + 2\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

$$2 - x = 2 - \cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx = \int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int 2\sin^2\theta\, d\theta = \int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta = \theta - \sin\theta\cos\theta$$

ஆனால் $x = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 1 + \sin^2\theta$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{x-1}$$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx = \sin^{-1}\sqrt{x-1} - \sqrt{2-1}\,\sqrt{2-x} + c$$

பயிற்சி 11.

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க.

1. $\sqrt{(x-3)(7-x)}$ 2. $\sqrt{7x - 10 - x^2}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{(x+2)(7-x)}}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$

5. $\sqrt{\dfrac{5-x}{x-2}}$ 6. $\sqrt{\dfrac{4-x}{x+4}}$

விடைகள் :

1. $4 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x-3}{4}} - \frac{5-x}{2}\sqrt{(x-3)(7-x)} + c$

2. $\frac{9}{4} \sin^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{3}}$

$- \frac{1}{4}(7-2x)\sqrt{(x-2)(5-x)} + c$

3. $2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x+2}{9}} + c$

4. $2 \sin^{-1} \sqrt{x-1} + c$

5. $3 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{3}} + \sqrt{(x-2)(5-x)}$

6. $-8 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4-x}{8}} + \sqrt{(4-x)(x+4)} + c$

§18. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ **போன்றவை.**

விதி (Rule) :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$ எனப் பிரதியிடு

$$\frac{dt}{dn} = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

எனவே $$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$ என்று வரும்.

மேலும் திரிகோணக் கணக்கு மூலம் $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ என்றும் $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ என்றும் நாம் அறிவோம்.

இவைகளை உரிய இடத்தில் இட்டால்,

கொடுத்த தொகையானது $\int \frac{dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$

என்ற உருவம் பெறும். இதை § 9·1 முறையில் தொகையிடல் எளிது.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{dx}{5 + 7\cos x + \sin x} \quad \text{(BE '53 Andhra)}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ என்றால் $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ஆகும்.

மேலும் $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{5 + 7\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{5 + 7\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{5(1+t^2) + 7(1-t^2) + 2t}$$

$$= 2\int \frac{2\,dt}{12 + 2t - 2t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5}\log\left\{\frac{\frac{5}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\log\left(\frac{2+t}{3-t}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{\left(2 + \tan\frac{x}{2}\right)}{\left(2 - \tan\frac{x}{2}\right)} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{dx}{13 + 12\cos x} \text{ (B. Tech. '71)}$$

$$t = \tan\frac{x}{2} \text{ என்றால்,} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

மேலும் $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

எனவே
$$\int \frac{dt}{13 + 12\cos x} = \int \frac{2\,dt/(1+t^2)}{13 + 12\dfrac{(1-t^2)}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{13(1+t^2) + 12(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2 + 5^2}$$

$$= \frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

பயிற்சி 12.

அடியில் கண்ட சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க :

1. $\dfrac{1}{5 + 4\sin x}$

2. $\dfrac{1}{1 - 3\sin x}$

3. $\dfrac{1}{20 + 29\cos x}$

4. $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

5. $\dfrac{1}{5 + 4\cos x + 3\sin x}$

6. $\dfrac{1}{3\cos x + 4\sin x + 6}$

7. $\dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 3}$

8. $\dfrac{1}{1 + 2\cos x}$ (B. E. '68)

9. $\dfrac{1}{5 + 4\cos x}$ (B. E. '65) (Kerala '66) (P.T. B.E. '71)

10. $\dfrac{1}{4 + 5\cos x}$ (B. Tech. '72)

விடைகள்

1. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(5\tan\frac{x}{2}+4\right)\right\}+c$

2. $\frac{1}{\sqrt{8}}\log\left\{\frac{\tan\frac{x}{2}-3-\sqrt{8}}{\tan\frac{x}{2}-3+\sqrt{8}}\right\}+c$

3. $\frac{1}{21}\log\left\{\frac{7+3\tan\frac{x}{2}}{7-3\tan\frac{x}{2}}\right\}+c$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left\{\frac{\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right\}+c$

5. $-\frac{2}{3+\tan\frac{x}{2}}+c$

6. $\frac{2}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{11}}\left(4+3\tan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

7. $\tan^{-1}\left\{1+2\tan\frac{x}{2}\right\}+c$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left\{\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}}\right\}+c$

9. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)$

10. $\frac{1}{3}\log\left\{\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right\}+c$

§ 19. $\int \frac{a\cos x + b\sin x + c}{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}\,dx$ **போன்றவை**

தொகைச் சார்பில் உள்ள தொகுதியை கீழ்வரும் விதிப்படி மூன்று பாகமாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

விதி (Rule)

தொகுதி $\equiv A$ (பகுதி) $+ B$ (பகுதியின் வகைக்கெழு) $+ C$

அதாவது,

$$a\cos x + b\sin x + c \equiv A(\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma) + B(-\alpha\sin x + \beta\cos x) + C.$$

இதனுல் கொடுத்த தொகை, மூன்று தொகைகளாக பின் வருமாறு பிரிகின்றன.

$$\int \frac{a\cos x + b\sin x + c}{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}\,dx$$

$$= A\int 1\cdot dx + B\int \frac{-\alpha\sin x + \beta\cos x}{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}\,dx + C\int \frac{dx}{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}$$

$$= Ax + B\log(\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma) + C\int \frac{dx}{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}$$

வலப் பக்கத்தில் வரும் தொகை காண § 18 ஐப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{\sin x + 18\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx \quad \dots \quad \dots \quad \text{(B.E. '54)}$$

$\sin x + 18\cos x \equiv A(3\sin x + 4\cos x) + B(3\cos x - 4\sin x) + C$ என்போம்

$\sin x$ — $\cos x$ ஆகியவற்றின் குணகங்களை இரு பக்கத்திலும் ஒப்பிட்டால்,

$$1 = 3A - 4B$$
$$18 = 4A + 3B$$

மாறிலிகளை ஒப்பிட்டால்,

$$\therefore \quad A = 3, \qquad B = 2 \qquad C = 0.$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sin x + 18 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}\, dx = 3 \int dx + 2 \int \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{3 \sin x + 4 \cos x}\, dx$$

$$= 3x + 2 \log (3 \sin x + 4 \cos x) + C$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{\cos x \; dx}{\cos x + \sin x}$$

$\cos x = A(\cos x + \sin x) + B(-\sin x + \cos x)$ என்போம்.

$$1 = A + B$$

$$0 = A - B \qquad\qquad \therefore \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{1 + \tan x} = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{(-\sin x + \cos x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log (\cos x + \sin x) + c$$

பயிற்சி 13.

பின்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க.

1. $\dfrac{2 \cos x + 3 \sin x}{3 \cos x + 5 \sin x}$

2. $\dfrac{1}{1 + \cot x}$ (B. E. 60, 62)

3. $\dfrac{2 \sin x + \cos x}{5 \sin x - 3 \cos x}$ (B. E. 63)

4. $\dfrac{\cos x + 2 \sin x}{2 \cos x + 3 \sin x}$ (B. E. 62 S. V.)

5. $\dfrac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$ (P. T. B. E. 72)

6. $\dfrac{5 \sin x - 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x}$ (B. Tech 68)

7. $\dfrac{1-\sin x}{2+\cos x}$ 8. $\dfrac{2\sin x+\cos x+3}{5+8\cos x}$

9. $\dfrac{a+b\cos x+c\sin x}{1+\sin x}$ 10. $\dfrac{3\sin x+\cos x}{4\cos x+5\sin x}$

(Kerala 66)

விடைகள்

1. $\dfrac{21}{34}x+\dfrac{1}{34}\log(3\cos x+5\sin x)+c$

2. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+c$

3. $\dfrac{7x}{34}+\dfrac{11}{34}\log(5\sin x-3\cos x)+c$

4. $\dfrac{8x}{13}-\dfrac{1}{13}\log(2\cos x+3\sin x)+c$

5. $-x-2\log(\sin x+2\cos x)+e$

6. $\dfrac{11x}{10}+\dfrac{13}{10}\log(\sin x-3\cos x)+c$

7. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)+\log(2+\cos x)+c$

8. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{4}\log(5+8\cos x)$

$$+\frac{19}{8\sqrt{39}}\log\left\{\frac{\sqrt{13}+\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{13}-\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}}\right\}+c$$

9. $cx+b\log(1+\sin x)-\dfrac{2(a-c)}{1+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}+c$

10. $\dfrac{19x}{41}-\dfrac{7}{41}\log(4\cos x+5\sin x)+c$

§ 20. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + b\sin^2 x}$ போன்றவை.

தொகைச் சார்பின் தொகுதியையும் பகுதியையும் $\sec^2 x$ ஆல் பெருக்கினால், தொகுதியில் $\sec^2 x$-ம், பகுதியில் $\tan^2 x$-ம் உள்ள தொகைச் சார்பு கிடைக்கும். பிறகு $t = \tan x$ எனப் பிரதியிடுக. மேற்படி தொகை $\int \frac{dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$ என்ற உருவம் பெறும். இதை § 9·1-ல் விளக்கியது போல் தொகையிடலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int \frac{dx}{3 - 2\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3 - 2\cos^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{3\sec^2 x - 2} \\ &= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{1 + 3\tan^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{1 + 3t^2}\ (t = \tan x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}\,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}\tan x) + c\end{aligned}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \frac{dx}{5\cos^2 x - 4\sin x\cos x - 2\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5\cos^2 x - 4\sin x\cos x - 2\sin^2 x} &= \int \frac{\sec^2 dx}{5 - 4\tan x - 2\tan^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{5 - 4t - 2t^2}\quad (t = \tan x)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - (t+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} \log\left\{\frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + (t+1)}{\sqrt{\frac{7}{2}} - (t+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{14}} \log\left\{\frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \tan x + 1}{\sqrt{\frac{7}{2}} - \tan x - 1}\right\} + c$$

பயிற்சி 14.

கீழ்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க.

1. $\frac{1}{1 + 3\sin^2 x}$
2. $\frac{1}{4 - 5\sin^2 x}$
3. $\frac{1}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}$
4. $\frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$
5. $\frac{1}{\cos x(\sin x + 2\cos x)}$
6. $\frac{1}{(2\sin x + 3\cos x)^2}$

விடைகள்

1. $-\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + c$
2. $\frac{1}{4}\log\left\{\frac{2 + \tan x}{2 - \tan x}\right\} + c$
3. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left\{\frac{1 + \sqrt{3}\tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x}\right\} + c$
4. $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + c$
5. $\log(2 + \tan x)$
6. $-\frac{1}{2(3 + 2\tan x)}$

§ 21. $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$,*

$\int \cos mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

போன்றவை.

இந்தத் தொகைச் சார்புகளை $\sin c \pm \sin d$ அல்லது $\cos c \pm \cos d$ என்ற (தரிகோண சூத்திரங்கள் மூலம்) உருவத்தில் எழுதி, பின்பு தொகையிடல் செய்யவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு

$$\int \sin 5x \sin 3x\, dx$$

$$\int \sin 5x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c$$

பயிற்சி 15.

பின் வரும் கோண விகிதச் சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்க.

1. $\sin 3x \cos 2x$ (B. E. '65 Osmania)
2. $\cos 6x \cos 2x$ (B. E. '66 Osmania)
3. $\sin 3x \sin 4x$ (B. E. '52)
4. $\sin 2x \cos 3x$ (B. E. '64)
5. $\sin x \cos 3x \cos 5x$

விடைகள்

1. $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c$
2. $\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$
3. $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + c$

4. $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

5. $-\frac{1}{36}\cos 9x + \frac{1}{28}\cos 7x - \frac{1}{12}\cos 3x$

$\frac{1}{4}\cos + c$

§ 22, பகுதிப் படுத்தித் தொகை காணல் (Integration by parts)

u, v என்பவை x ஐ மாறியாக உடைய இரு சார்புகள் என்போம். அவைகளின் பெருக்கல் பலன் uv ஆகும். இந்த uv என்ற பெருக்கல் பலனை வகையிடல் செய்வதற்கான சூத்திரத்தை அறிவோம்.

அதாவது $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ... (1)

இதை, பெருக்கலை வகையிடும் சூத்திரம் (formula for differentiation of a product) என்கிறோம். இதைப் போன்று பெருக்கலைத் தொகையிடும் சூத்திரம் உண்டா என்று இப்போது ஆராய்வோம்.

(1)-வது சமன்பாட்டை மாற்றியமைத்தால்,

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$$

இரு பக்கங்களையும் x ஐக் குறித்துத் தொகையிட்டால்,

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = \int \frac{d}{dx}(uv)\,dx - \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

ஆனால் $\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int d(uv) = uv$

எனவே $\int u\frac{dv}{dx}\cdot dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\cdot dx$ ... (2)

இதுதான் நாம் விரும்பிய பெருக்கலைத் தொகையிடும் சூத்திரம்.

இந்தச் சூத்திரத்தில் வலப் பக்கத்திலும் ஒரு தொகையீடு வருகிறது. அதன் மதிப்பை தொகையிட்டு அறிந்தபின்தான், இடப் பக்கத்திலுள்ள தொகையீட்டை முழுவதும் கண்டதாக சொல்ல இயலும். (அ - து) ஒரு பெருக்கலைத் தொகையிடல்

செய்ய, மற்றொரு தொகையிடலையும் செய்யவேண்டியுள்ளது. இதனால், சூத்திரம் (2)-க்கு பகுதிப் படுத்தித் தொகையிடல் (Integration by parts) என்று பெயர்.

சூத்திரம் (2) ஐ நடை முறையில் பயன் படுத்தும் போது, கீழ்க்காணும் எளிய முறையில் நினைவில் கொள்ளுதல் நலம். (சூத்திரம் (2) ஐ அப்படியே பயன்படுத்துவதில் சிறிது சிரமம் உண்டு).

சூத்திரம் (2)-ல், $u = I$, $\frac{dv}{dx} = II$ என்போம்.

பின்பு, $v = \int II\,dx \equiv II$-ன் தொகை $\equiv \text{Int } II$ என்போம்.

மேலும் $\frac{du}{dx} \equiv \frac{dI}{dx} \equiv I$-ன் வகைக்கெழு $\equiv D.C.I$ என்போம்.

மேற்படி குறியீடுகளுடன், சூத்திரத்தை எழுதினால்,

$$\int I \cdot II \cdot dx = I \cdot (\text{Int } II) - \int (\text{Int } II) \cdot (DCI)\,dx$$

அல்லது,

$$\int I \cdot II\,dx = I \cdot (\text{Int } II) - \int (DCI) \cdot (\text{Int } II) \cdot dx \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

மேற்படி சூத்திரம் (3)-ஐப் பயன்படுத்தும் போது, சில சார்புகளை I என்றும், சிலவற்றை II என்றும் வைத்துக்கொண்டு தொகையிடல் அவசியமாகும். மாற்றி வைத்துத் தொகையிடத் தொடங்கினால் இயலாதுபோகும். உதாரணமாக, $\int x \cos x\ dx$ என்பதில் $\cos x \equiv I$ என்றும், $x \equiv II$ என்றும் வைத்துக்கொண்டு, தொகையிட்டால்,

$$\int x \cos x \cdot dx = (\cos x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int (\sin x)\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

வலப்பக்கத்தில் உள்ள தொகை காண்பது, இடப்பக்கத்துத் தொகை காண்பதைவிட மிக்க கடினம். அதாவது நாம் தவறுதலாக I-ஐயும், II-ஐயும் தேர்ந்தெடுத்திருக்கிறோம் என்று பொருள்

ஆனல் அதற்கு மாருக $x \equiv I$ என்றும், $\cos x \equiv II$ என்று தேர்ந்தெடுத்தால்,

$$\int x \cos x \, dx = x (\sin x) - \int 1 \,.\, (\sin x) \, dx$$

இதில், வலப் பக்கத்துத் தொகை காண்பது மிக்க எளிது.

(அதாவது) $\int 1 \cdot \sin x \, dx = -\cos x$

எனவே $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில், சில முக்கியமான சார்புகளின் பெருக்கல்களில், எதை I - என்றும், எதை II - என்றும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்ற விவரம் தரப்படுகிறது. இவைகளை நினைவில் கொள்வது நலம். மாற்றி தெரிந்தெடுத்தால் தொகையிடல் செய்ய இயலாது என்று சில கணக்குகள் செய்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

குறிப்பு :

n என்பது ஒரு நேர் முழு எண் (Positive integer)

சார்புகளின் பெருக்கல்	சார்பு I	சார்பு II	குறிப்பு
$x^n \sin ax$	x^n	$\sin ax$	$n \neq 0$
$x^n \cos ax$	x^n	$\cos ax$	$n \neq 0$
$x^n e^{ax}$	x^n	e^{ax}	$n \neq 0$
$x^n \sin^{-1} x$	$\sin^{-1} x$	x^n	$n = 0$ உள்பட
$x^n \cos^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	x^n	$n = 0$ உள்பட
$x^n \tan^{-1} x$	$\tan^{-1} x$	x^n	$n = 0$ உள்பட
$x^n (\log x)^p$	$(\log x)^p$	x^n	$n = 0$ உள்பட
$e^{ax} \cos bx$	e^{ax} அல்லது $\cos bx$	$\cos bx$ அல்லது e^{ax}	
$e^{ax} \sin bx$	e^{ax} அல்லது $\sin bx$	$\sin bx$ அல்லது e^{ax}	

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int x \sin^2 x \; dx$$

$$\int x \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2} \int x\,(1-\cos 2x)\; dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x \; dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \; dx$$

$$(x \equiv I, \; \cos 2x \equiv II)$$

$$= \frac{1}{2}\, x \; \frac{1}{2} \left[x \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) - \int 1 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\, x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\, x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int \cos \sqrt{x} \; dx \quad \text{(B. Tech. '71)}$$

$t = \sqrt{x}$ என்றால், $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ அல்லது $dx = 2t\; dt$

$$\therefore \int \cos \sqrt{x} \; dx = \int \cos t \,.\, 2t\, dt$$

$$= 2 \int t \,.\, \cos t \; dt$$

$$(t \equiv I, \; \cos t \equiv II)$$

$$= 2 \left[t\,(\sin t) - \int 1 \,.\, (\sin t)\; dt \right]$$

$$= 2 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3 :

$$\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$$

$$\int x^2 \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \cdot x^2 \, dx$$

$$= (\sin^{-1} x)\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^3}{3} \cdot dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

இப்போது,

$t = \sqrt{1-x^2}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$dt = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \; ; \; -dt = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

மேலும் $1 - x^2 = t^2$ (அ - து) $x^2 = 1 - t^2$

$$\therefore \int x^2 \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x - \frac{1}{3} \int (1 - t^2)(-dt)$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{t}{9}(3 - t^2)$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{9}[3 - (1 - x^2)]$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{9} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$\int \tan^{-1} x \, dx$ (P. T. B. E. '71 Kerala '62)

$$\int \tan^{-1} x \cdot 1 \cdot dx = (\tan^{-1} x)(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$$\int x^n (\log x)\, dx$$

$$\int x^n (\log x)\, dx = \int (\log x) \cdot x^n \cdot dx$$

$$= (\log x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$$\int x^2 e^{-7x}\, dx$$

$$\int x^2 e^{-7x}\, dx = x^2\left(-\frac{1}{7} e^{-7x}\right) - \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{7} e^{-7x}\right) dx$$

$$= -\frac{x^2}{7} e^{-7x} + \frac{2}{7} \int x e^{-7x}\, dx$$

$$= -\frac{x^2}{7} e^{-7x} + \frac{2}{7}\left[x\left(-\frac{1}{7} e^{-7x}\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{7} e^{-7x}\right) dx\right]$$

$$= -\frac{x^2}{7} e^{-7x} + \frac{2}{7}\left[-\frac{x}{7} e^{-7x} + \frac{1}{7} \int e^{-7x}\, dx\right]$$

$$= -\frac{x^2}{7} e^{-7x} + \frac{2}{7}\left[-\frac{x}{7} e^{-7x} - \frac{1}{49} e^{-7x} \right]$$

$$= -e^{-7x}\left(\frac{x^2}{7} + \frac{2x}{49} + \frac{2}{343}\right) + c$$

குறிப்பு :

இந்தக் கணக்கை வெகு எளிதாக, பின்பு விளக்கப்படும் பெர்னுல்லி (Bernouilli) யின் சூத்திரங்கொண்டு, செய்யலாம். (§ 23 ஐப் பார்க்கவும்)

மாதிரிக் கணக்கு 7 :

$$C = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$C = e^{ax}\left(\frac{1}{b} \sin bx\right) - \int a e^{ax}\left(\frac{1}{b} \sin bx\right) dx$$

(இங்கே $e^{ax} \equiv I$, $\cos bx \equiv II$)

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\left[e^{ax}\left(-\frac{1}{b} \cos bx\right) - \int a e^{ax}\left(-\frac{1}{b} \cos bx \right) dx \right]$$

(குறிப்பு : 2-வது தடவை சூத்திரம் உபயோகிக்கும் போதும், முன்போலவே $e^{ax} \equiv I$ என்று எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். மாற்றி எடுக்கக் கூடாது).

$$C = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \cdot C$$

$$\therefore \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) C = \frac{e^{ax}}{b^2}\left\{ b \sin bx + a \cos bx \right\}$$

$$\therefore \quad C = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[a \cos bx + b \sin bx \right] + K.$$

மாற்று முறை :

$$C \equiv \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$S \equiv \int e^{ax} \sin bx \, dx$$ என்போம்.

$$C + iS = \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \, dx$$

$$= \int e^{ax} \cdot e^{ibx} \, dx$$

$$= \int e^{(a+ib)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} + K + iL$$

$$= \frac{a - ib}{(a+ib)(a-ib)} e^{ax} \cdot e^{ibx} + K + iL$$

(அதாவது)

$$C + iS = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + K + iL$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை இரு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$C = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + K$$

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + L$$

மாதிரிக் கணக்கு 8.

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx$$

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx = \int \frac{x \, dx}{1 + \cos x} + \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos x}$$

$$= \int \frac{x \, dx}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)} + \int \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \, dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int x \sec^2 \frac{x}{2}\, dx + \int \tan \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\left(2 \tan \frac{x}{2}\right) - \int 1 \left(2 \tan \frac{x}{2}\right) dx\right] + \int \tan \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} \cdot dx + \int \tan \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= x \tan \frac{x}{2} + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

$\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + c$ என்று காண்பிட. இதைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேற்றுமுறையிலோ

$$\left(\frac{1 + x \log x}{x}\right) e^x\text{-ன்}$$

தொகையைக் காண்க. (B. Tech. '71)

$$\int e^x [f(x) + f'(x)\, dx$$

$$= \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= \int e^x f(x)\, dx + [e^x f(x) - \int e^x f(x)\, dx]$$

$$= e^x f(x) + c$$

மேலும், $\int \left(\frac{1 + x \log x}{x}\right) e^x\, dx$

$$= \int e^x \left[\log x + \frac{1}{x}\right] dx$$

$$= \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx \quad [\because f(x) = \log x]$$

$$= e^x f(x) + c$$

$$= e^x \log x + c$$

பயிற்சி 16.

பின்வரும் சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க :

1. $(\log x)$
2. $(\log x)^2$
3. $\dfrac{\log x}{x^n}$
4. $x \log (x+1)$ (Kerala '64)
5. $(x^3+1) \log x$ (B. Tech. '70)
6. $\dfrac{\log x}{(x+1)^2}$
7. $x \sin 5x$
8. $x \cos^2 x$
9. $x \sin^3 x$ (B. Tech. '72)
10. $x \tan^2 x$
11. $x \sec x \tan x$
12. $\sin^{-1} x$ (B. Tech '72)
13. $x \sin^{-1} x$
14. $x \tan^{-1} x$
15. $x^2 \tan^{-1} x$ (B.E. '70)
16. $(\sin^{-1} x)^2$
17. $x^2 e^{ax}$ (B. Tech 68)
18. $\dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1+x^2}$
19. $\dfrac{x^3 \sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
20. $\dfrac{\tan^{-1} x}{x^2}$
21. $x^2 \sec^{-1} x$
22. $\dfrac{x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$
23. $\dfrac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
24. $x^3 \tan^{-1} x$
25. $\dfrac{x}{1+\sec x}$
26. $\dfrac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$
27. $\log (1+x^2)$
28. $e^x (\cot x + \log \sin x)$
29. $e^x (\sin x + \cos x) \sec^2 x$
30. $\dfrac{e^x (1+\sin x)}{1+\cos x}$ (B.Tech.'72)
31. $e^{-5x} \sin x$ (P.T. B.E. 71)
32. $\dfrac{x e^x}{(1+x)^2}$ (B. Tech. '72) (Kerala 68)
33. $x^n (\log x)^2$ (Kerala 68)

விடைகள்

1. $x(\log x - 1) + c$

2. $x[(\log x)^2 - 2\log x + 2] + c$

3. $-\dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{\log x}{x^{n-1}} + \dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\right] + c$

4. $\dfrac{x^2-1}{2}\log(x+1) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + c$

5. $\left(\dfrac{x^4}{4} + x\right)\log x - \dfrac{x^4}{16} - x + c$

6. $-\dfrac{\log x}{x+1} + \log\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + c$

7. $-\dfrac{x}{5}\cos 5x + \dfrac{1}{25}\sin 5x + c$

8. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{8}\cos 2x + c$

9. $\dfrac{3}{4}(\sin x - x\cos x) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}\sin 3x - \dfrac{x}{3}\cos 3x\right) + c$

10. $x\tan x - \log\sec x - \dfrac{1}{2}x^2 + c$

11. $x\sec x - \log(\sec x + \tan x) + c$

12. $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

13. $\dfrac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \dfrac{1}{4}\sin^{-1}x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c$

14. $\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x - \dfrac{x}{2} + c$

15. $\dfrac{1}{3}x^3\tan^{-1}x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}\log(1+x^2) + c$

16. $x(\sin^{-1}x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + c$

17. $e^{ax}\left(\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2}{a^3}\right) + c$

18. $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) - \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x\right)^2 + c$

19. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{1 - x^2}} \sin^{-1} x - x - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + c$

20. $\frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right) - \frac{\tan^{-1} x}{x^2} + c$

21. $\frac{x^3}{3} \sec^{-1} x - \frac{1}{6}\{x\sqrt{x^2 - 1} + \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\} + c$

22. $\frac{1}{3}\left[\frac{6x + x^3}{3} - \sqrt{1 - x^2}\,(2 + x^2) \sin^{-1} x\right] + c$

23. $\frac{x - \tan^{-1} x}{\sqrt{1 + x^2}} + c$

24. $\frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \tan^{-1} x + c$

25. $\frac{x^2}{2} - x \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \log \sec\left(\frac{x}{2}\right) + c$

26. $x - \sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x + c$

27. $x \log(1 + x^2) - 2x + 2 \tan^{-1} x + c$

28. $e^x \log \sin x + c$ 29. $e^x \sec x + c$

30. $e^x \tan \frac{x}{2} + c$ 31. $-\frac{e^{-5x}}{26}(5 \sin x + \cos x) + c$

32. $\frac{e^x}{1 + x} + c$

33. $x^{n+1}\left\{\frac{(\log x)^2}{n + 1} - \frac{2 \log x}{(n + 1)^2} + \frac{2}{(n + 1)^3}\right\} + c$

[குறிப்பு : கணக்கு (32)]

$$\frac{xe^x}{(1 + x)^2} = \frac{(1 + x - 1)\, e^x}{(1 + x)^2}$$

$$= \frac{e^x}{1 + x} - \frac{e^x}{(1 + x^2)}$$

$$\therefore \int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \int \frac{e^x \cdot dx}{1+x} - \left[e^x \left(-\frac{1}{1+x} \right) - \int e^x \left(-\frac{1}{1+x} \right) dx \right]$$

$$= \int \frac{e^x\,dx}{1+x} + \frac{e^x}{1+x} - \int \frac{e^x\,dx}{1+x}$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + c \Bigg]$$

§ 23. பெர்னுல்லி (Bernouilli) யின் சூத்திரம்

பகுதிப்படுத்தி தொகையிடல் சூத்திரத்தின் விரிவு (extension) தான் பெர்னுல்லியின் சூத்திரம். சில சார்புகளைத் தொகையிடல் செய்யும்போது பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடும் முறையை திரும்பத் திரும்ப பல முறை பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கும். உதாரணமாக $x^4 \cos x$-ஐத் தொகையிடல் செய்யும்போது, நான்கு முறை பயன்படுத்தவேண்டும். அப்போது பலவரிகள் எழுதி கடைசியில் சுருக்க வேண்டிவரும். அந்த மாதிரி கணக்குகளில் பெர்னுல்லியின் சூத்திரத்தை நயமாக பயன்படுத்தி எளிதில் விடைபெற இயலும்.

u, v என்பவை x-ன் இரு சார்புகள் என்போம். u^1, u^{11}, u^{111}, ... என்பவைகள் u-வின், முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... வகைக் கெழுக்களைக் குறிக்கட்டும்.

v_1. v_2, v_3, ... என்பவைகள் v-ன் முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... தொகைகளைக் குறிக்கட்டும். பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் சூத்திரமாவது :—

$$\int I \cdot II \cdot dx = I \cdot (\text{Int } II) - \int (DCI) \cdot (\text{Int } II)\,dx$$

இதில் I-க்கு u-ம், II-க்கு v-ம், இடவும் பின் $DCI = u^1$ ஆகும். மேலும் Int $II = v_1$ ஆகும் எனவே $\int uvdx = uv_1 - \int u^1 v_1 dx$

வலப்பக்கத்து தொகையில் மீண்டும் இதேமுறையைப் பின்பற்றி எழுதுக,

$$\int u\,v\,dx = u\,v_1 - \left[u'\,v_2 - \int u''\,v_2\,dx \right]$$

$$= u\,v_1 - u'\,v_2 + \int u''\,v_2\,dx$$

$$= u\,v_1 = u'\,v_2 + u''\,v_3 - \int u'''\,v_3\,dx$$

$$= \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

இப்படியே தொடர்ந்தால்

$$\boxed{\int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - \ldots + (-)^n \int u^{(n)} v_n\,dx}$$

இதை பெர்னுல்லியின் சூத்திரம் என்கிறோம்.

இந்த சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்போது, u - என்னும் சார்பின் வகைக்கெழுக்கள்ப டிப்படியாக குறைந்து கொண்டே வர வேண்டும். இல்லையானால், தொகையிடல் முடிவடையாது என்று உணர வேண்டும். அதனால் u - என்ற சார்பை சரியான முறையில் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். முக்கியமாக x^n-ஐ u - ஆக தேர்ந்தெடுக்கும் வாய்ப்பு உள்ள சார்புகளைத் தொகையிட மேற்படி பெர்னுல்லியின் சூத்திரம் மிகுதியாகப் பயன்படும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int x^3\,e^{7x}\,dx$$

இங்கே $x^3 \equiv u,\quad e^{7x} \equiv v$ என்போம்.

$$\int x^3\,e^{7x}\,dx = x^3\left(\frac{1}{7}\,e^{7x}\right) - 3x^2\left(\frac{1}{7^2}\,e^{7x}\right)$$

$$+ 6x\left(\frac{1}{7^3}\,e^{7x}\right) - 6\left(\frac{1}{7^4}\,e^{7x}\right)$$

$$= e^{7x}\left[\frac{x^3}{7} - \frac{3x^2}{7^2} + \frac{6x}{7^3} - \frac{6}{7^4}\right] + c$$

றிப்பு :

$e^{7x} \equiv u$, $x^3 \equiv v$ என்று தெரிந்தெடுத்தால், தொகையிடல் டிவடையாது என்பது தெளிவு

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int x^4 \cos 5x \, dx$$

$$\int x^4 \cos 5x \, dx = x^4 \left(\frac{1}{5} \sin 5x\right) - 4x^3 \left(-\frac{1}{5^2} \cos 5x\right)$$

$$+12x^2\left(-\frac{1}{5^3} \sin 5x\right) - 24x\left(+\frac{1}{54}\cos 5x\right)$$

$$+ 24\left(\frac{1}{5^5} \sin 5x\right)$$

$$= \frac{x^4}{5} \sin 5x + \frac{4x^3}{5^2} \cos 5x - \frac{12x^2}{5^3} \sin 5x$$

$$- \frac{24x}{5^4} \cos 5x + \frac{24}{5^5} \sin 5x + c$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$c = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

இந்தக் கணக்கை முன்பே செய்து காட்டியிருக்கிறோம். பெர்னுல்லி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்போது இன்னும் சிறிது எளிதாக விடைவரும். இங்கே $e^{ax} \equiv u$ என்றும், $\cos bx \equiv v$ என்றும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். [$\cos bx \equiv u$, $e^{ax} \equiv v$ என்று எடுத்துக் கொண்டாலும், அதே விடை அதே முறையில் கிடைக்கும்.] ஆனால் மாதிரிக் கணக்கு (1), (2) போல், உடனே தொகையிடல் முடிவடையாது. ஆனால் கொடுத்த தொகை C வலப்பக்கமும் வரும்.

$$\int uv \, dx = uv_1 - u' v_2 + \int u'' v_2 \, dx$$

இதில் $u \equiv e^{ax}$, $v \equiv \cos bx$ என்றால்,

$$c = e^{ax}\left(\frac{1}{b} \sin bx\right) - ae^{ax}\left(-\frac{1}{b^2} \cos bx\right)$$

$$+\int a^2 e^{ax}\left(-\frac{1}{b^2} \cos bx\right)dx$$

அதாவது,

$$c = e^{ax}\left[\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b}\cos bx\right] - \frac{a^2}{b^2}\cdot c$$

எனவே $\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) c = e^{ax}\left[\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b}\cos bx\right]$

$$\therefore\quad c = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + K.$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$\int e^x (x + 1)\log x\, dx$$

$$\int e^x (x + 1)\log x\, dx = \int \log x\{e^x (x + 1\}\, dx$$

$$= (\log x)\ \{\text{Int } e^x (x + 1)\} - \int \frac{1}{x}.\{\text{Int } e^x (x + 1)\}\, dx$$

ஆனல் $\text{Int } e^x (x + 1) = \int (x + 1)\, e^x\, dx$

$$= (x + 1)\, e^x - 1\cdot e^x = x\, e^x$$

$$\therefore\quad \int e^x (x + 1)\log x\, dx = \log x\{x\, e^x\} - \int \frac{1}{x}.\, x\, e^x\, dx$$

$$= xe^x . \log x - e^x + c$$

பயிற்சி 17.

கீழ்வரும் சார்புகளின் தொகைகளைக் காண்க :

1. $x^3 e^{2x}$
2. $x^2 e^{-x}$
3. $e^x (x-1)^2$
4. $x^3 \cos 10x$
5. $x^2 \sin (x + a)$
6. $3^x \sin 2x$ (B.E. '55)
7. $\cos h\, 3x \sin 4x$ (B.E.'58)
8. $e^{-x} \sin x$
9. $e^{ax} \sin (bx + c)$
10. $e^{-2x} \sin 3x \sin 4x$
11. $e^{-2x} \cos^2 x$

விடைகள்

1. $\frac{e^{2x}}{8}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + c$

2. $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$

3. $e^x(x^2 - 4x + 5) + c$

4. $\frac{x^3}{10}\sin 10x + \frac{3x^2}{100}\cos 10x - \frac{6x}{1000}\sin 10x + \frac{6}{1000}\cos 10x + c$

5. $-x^2\cos(x+a) + 2x\sin(x+a) + 2\cos(x+a) + c$

6. $\frac{3^x}{(\log 3)^2 + 4}\{\log 3 \cdot \sin 2x - 2\cos 2x\} + c$

[குறிப்பு : $3^x = e^{(\log 3)\cdot x}$]

7. $\frac{3}{25}\sin h\, 3x \sin 4x - \frac{4}{25}\cos h\, 3x \cos 4x + c$

8. $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + c$

9. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)] + c$

10. $\frac{e^{-2x}}{10}(\sin x - 2\cos x) - \frac{e^{-2x}}{106}(7\sin 7x - 2\cos 7x) + c$

11. $-\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{8}(\sin 2x - \cos 2x) + c$

§ 24. வரையறுத்த தொகை (Definite Integral)

வரை விலக்கணம் (Definition)

$\int f(x)\,dx$ என்ற வரையறாத தொகையின் மூலச் சார்பு (primitive) $\phi(x)$ என்றால், அந்த மூலச் சார்பில் $x=b$, $x=a$ என அடுத்தடுத்து பிரதியிட்டால் முறையே $\phi(b)$, $\phi(a)$ என்னும் மாறிலிகள் கிடைக்கும். இவைகளிலிருந்து பெறப்படும்

$\phi(b) - \phi(a)$ என்ற மாறிலி மதிப்பை a முதல் b வரையில் படும் $f(x)$-ன் வரையறுத்த தொகை என்று கூறுவர். இதை

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ \phi(x)\ \Big]_a^b = \phi(b) - \phi(a)$$

என்று குறியீடு முறையில் எழுதுகிறோம்.

இதில் வரும் a, b என்பவைகளை முறையே கீழ்வரம்பு அல்லது கீழ்எல்லை (lower limit), மேல் வரம்பு அல்லது மேல் எல்லை (upper limit) என்று கூறுகிறோம்.

a முதல் b வரையுள்ள இடைவெளி, தொகைக்குரிய கட்டம் (range of integration) எனப்படும்.

இந்த வரையறுத்த தொகையின் பெறுமானமும், $y=f(x)$ என்ற வளைகோடு, x அச்சு, $x=a$, $x=b$ என்ற குத்து ஆயங்கள் (ordinates) ஆகியவற்றில் அடங்கிய பரப்பளவின் பெறுமானமும் ஒன்றே என்று பின்பு அறிவோம்.

பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளை நன்கு கவனித்தால் வரை யறுத்த தொகை காணும் முறை தெளிவாகும்.

முக்கியக் குறிப்பு 1: இதுவரை செய்துள்ள வகையருத தொகைக் கணக்குகளில், சில வேளைகளில் x என்ற மாறியை, t-என்ற மாறிக்கு மாற்றிக் கொண்டு தொகையிடல் செய்துவிட்டு, கடைசியில் பழைய x-மாறிக்கு மாற்றியமைத்து விடை எழுதியிருக் கிறோம். வரையறுத்த தொகைக் கணக்கிலும், முதலில் x-லிருந்து t-க்கு மாற்றி தொகையிடல் செய்து, பழையபடி x-க்கு மாற்றிக் கொண்டு, x-ன்மேல், கீழ் வரம்புகள் இட்டு, விடையைக் காணலாம். அல்லது, x-லிருந்து t-க்கு மாற்றும்பொழுது, x-ன் வரம்புகளையும் t-ன் வரம்புகளுக்கு மாற்றிக் கொண்டுவிட்டால், (பழைய x-க்கு மாற்றுமலேயே), t-ன் சார்பாக வரும் வரையருத தொகையில் t-ன் மேல், கீழ் வரம்புகள் இட்டு விடை காணலாம். இதை குறியீடு முறையில் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

$x = u(t)$ என்றால், $dx = u'(t)\,dt$

$x = a$ ஆகும் போது, $t = \alpha$ என்றும்

$x = b$ ஆகும் போது, $t = \beta$ என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{பின்,} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f[u(t)]\,u'(t)\,dt$$

$$= [\psi(t)]_{t=\alpha}^{t=\beta} \quad \left(\int f[u(t)]\,u'(t) = \psi(t) \text{ என்றால்}\right)$$

$$= \psi(\beta) - \psi(\alpha)$$

ஒரு உதாரணத்தின் மூலம் மேலும் நன்றாக விளக்கப் படுகிறது. நேராக தொகையிடல் செய்து

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_{x=0}^{\infty} = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \text{ என்று விடை காணலாம்.}$$

அதற்கு மாறாக, $x=\tan\theta$ எனப் பிரதியிட்டால், $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ ஆகும்.

மேலும், $x=0$ என்றால், $\tan\theta = 0$

அதாவது $\theta = 0$

$x = \infty$ என்றால், $\tan\theta = \infty$

அதாவது $\theta = \pi/2$

அதாவது θ-வின் கீழ், மேல் வரம்புகள் 0, $\pi/2$ ஆகும்.

$$\text{எனவே} \int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta$$

$$= \Big[\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi/2} = \pi/2 - 0$$

$$= \pi/2$$

என்றும் அதே விடை வருகிறது,

முக்கிய குறிப்பு 2 : $\tan^{-1} \infty = \pi/2$ என்றுதான் ஏன் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும் ? $(2n+1)\pi/2$ $n=0, 1, 2, \ldots$ என ஏன் எடுத்துக் கொள்ளக் கூடாது என ஐயம் எழலாம். இந்த மாதிரி பல மதிப்புடைய சார்புகள் (multivalued functions) வந்தால், தலையாய மதிப்பைத்தான் (only principal value) தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்பது மரபு.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5 \sin x}$$

$t = \tan \frac{x}{2}$ என்றால், $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

மேலும், $x = 0$ என்றால், $t = 0$

$x = \pi/2$ என்றால், $t = \tan \pi/4 = 1$

$$\therefore \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5 \sin x} = \int_{t=0}^{1} \frac{2dt/(1 + t^2)}{4 + 5 \cdot 2t\ (1 + t^2)}$$

$$= 2 \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{4(1 + t^2) + 10t}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} \left[\log \left\{ \frac{t + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{t + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}} \right\} \right]_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\log \frac{2t + 1}{2t + 4} \right]_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\log \frac{3}{6} - \log \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \log 2$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1 + x^2} dx$$

$x = \tan\theta$ என்று பிரதியிட்டால், $dx = \sec^2\theta \, d\theta$

$x = 0$ ஆகும் போது, $\tan\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 0$

$x = 1$ ஆகும் போது, $\tan\theta = 1, \quad \therefore \theta = \pi/4$

$$\therefore \int_{x=0}^{1} \frac{(\tan^{-1} x)^2 \, dx}{1 + x^2} = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\theta^2 \cdot \sec^2\theta \, d\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \theta^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} [\theta^3]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right)^3 - 0^3 \right]$$

$$= \frac{\pi^3}{192}$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, \cos^5 x\, dx$$

$t = \sin x$ என்று பிரதியிட்டால். $dt = \cos x\, dx$.

மேலும் $x = 0$ என்றால், $t = \sin 0 = 0$

$x = \pi/2$ என்றால், $t = \sin \pi/2 = 1$

$$\therefore \int_{x=0}^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, \cos^5 x\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cdot \cos^4 x \cos x\, dx$$

$$= \int_{t=0}^{1} t^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - t^2)^2\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} t^{\frac{1}{2}} (1 - 2t^2 + t^4)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}})dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{7}\, t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}\, t^{\frac{11}{2}} . \right]_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2}{11} = \frac{64}{231}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}$$

$t = e^x$ என்க. $dt = e^x\, dx = t\,dx$

மேலும், $x = 0$ என்றால், $t = e^0 = 1$

$x = \infty$ என்றால், $t = e^{\infty} = \infty$

$$\therefore \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} = \int_{t=1}^{\infty} \frac{dt/t}{a^2 t + \frac{b^2}{t}}$$

$$= \int_{t=1}^{\infty} \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b/a} \left[\tan^{-1} \frac{at}{b} \right]_{t=1}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{ab} \left[\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{ab} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}\right) \right]$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$$\int_{2}^{5} \sqrt{\frac{x - 2}{5 - x}}\, dx \quad \text{(B. Tech. '69)}$$

[ε-8]

$x = 2 \cos^2 \theta + 5 \sin^2 \theta$ எனப் பிரதியிடு

$$\frac{dx}{d\theta} = -4 \sin \theta \cos \theta + 10 \sin \theta \cos \theta = 6 \sin \theta \cos \theta$$

$$x - 2 = 2\cos^2\theta + 5\sin^2\theta - 2$$
$$= 5\sin^2\theta - 2\sin^2\theta = 3\sin^2\theta$$

$$5 - x = 5 - 2\cos^2\theta - 5\sin^2\theta$$
$$= 5\cos^2\theta - 2\cos^2\theta = 3\cos^2\theta$$

மேலும், $x = 2$ என்றால்,

$$2 = 2\cos^2\theta + 5\sin^2\theta$$

அதாவது $2\sin^2\theta = 5\sin^2\theta$

அதாவது $3\sin^2\theta = 0 \qquad \therefore \quad \theta = 0.$

அதேபோல், $x = 5$ என்றால்,

$$5 = 2\cos^2\theta + 5\sin^2\theta$$

அதாவது $5\cos^2\theta = 2\cos^2\theta$

அதாவது $\cos^2\theta = 0$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_{x=2}^{5} \sqrt{\frac{x-2}{5-x}}\, dx$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{3\sin^2\theta}{3\cos^2\theta}} \cdot 6\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 6\int_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}*$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

* இந்த விடை வாலி சூத்திரம் (Walli's formula) பயன்படுத்தி வந்தது (§ 22.6-ஐப் பார்க்கவும்.)

பயிற்சி 18.

கீழ்க்கண்ட வரையறுத்த தொகைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க:

விடை

1. $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ (P.T. B.E. '71) — 1. $\frac{1}{2}$

2. $\int_1^2 x^2 \log x\,dx$ — 2. $\frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{4}$

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{1+\cos^2 x}$ — 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$ — 4. $\log 2$

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ (P. T. B. E. '71) — 5. $\log\left(\frac{9}{8}\right)$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ — 6. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

7. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ — 7. $\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$

8. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ — 8. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$ 9. $\frac{\pi}{6}$

10. $\int_0^\pi \frac{dx}{5+3\cos x}$ 10. $\frac{\pi}{4}$

11. $\int_0^\pi \frac{dx}{5+4\cos x}$ (P. T. B. E '72)   11. $\frac{\pi}{3}$

12. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x}$ 12. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$

13. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(1+\sin^2 x)}$ (B. E. '71)   13. $\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{8}$

14. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+3\tan x}$ 14. $\frac{\pi}{13}+\frac{3}{13}\log\left(\frac{3}{2}\right)$

15. $\int_0^1 \frac{x^5\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (B.E. '70)   15. $\frac{7\sqrt{2}}{15}$

16. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ 16. π

17. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$ 17. π

18. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (B. E. '48)

18. π

19. $\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

19. $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$

20. $\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx$

20. $\frac{\pi}{8}$

21. $\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(b>a)$

21. $\frac{\pi}{2}(a+b)$

22. $\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx$

22. $\frac{a^2}{4}(\pi-2)$

23. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $\frac{\pi-2}{8}$

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

24. $\frac{\pi}{2}$

25. $\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ (B. E. '49)

25. πa

26. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ (B. E. '57)

26. $\frac{\pi}{4}$

27. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ 27. $\frac{4}{3}$

28. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$ (B. E. '51) 28. $\frac{1}{2}$

29. $\int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 4x\, dx$ (P. T. B. E. '72)

29. $\frac{3}{25}$

30. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 - 2ab \cos x + b^2}$ $(a > b > 0)$

30. $\frac{\pi}{a^2 - b^2}$

31. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \sin x + \cos x}$ 31. $\frac{\pi}{4}$

32. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin^{-1} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ 32. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$

33. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta\, d\theta}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}$ 33. $\frac{\pi}{6}$

34. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x}$ 34. $\frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \log 3$

35. $\int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}\, dx$ 35. $\frac{1}{2}$

36. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + A\sin^2 x} (A > 0)$ (B. E. '70)

36. $\frac{\pi}{\sqrt{A+1}}$

37. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1 + \cos x)^2}$ (B. E. '57)

37. $2 - \frac{\pi}{4}$

38. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \tan x}$ (B. E. '58)

38. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \log 2$

39. $\int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x\, dx$ (B. E. '60)

39. $\frac{1}{8}$

40. $\int_0^{1} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ (P. T. B. E. '71)

40. $\frac{\pi^2}{8}$

41. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$

41. $\frac{1}{a^2}$

42. $\int_0^{\pi/4} x \tan^2 x\, dx$ (B. E. '51), (P. T. B. E. '71)

42. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi^2}{32}$

43. $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x\, dx}{1 + x^2}$

43. $\frac{\pi^2}{8}$

44. $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (B. E. '59)

44. $\frac{\pi}{2(a+b)}$

45. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

45. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

46. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

46. $\frac{1}{3}\log^2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

47. $\int_0^\infty \frac{3+3x+x^2}{(x^2+2x+2)^2}$

47. $\frac{1}{4}(\pi+1)$

(குறிப்பு: $3+3x+x^2 = A(x^2+2x+2)+B(2x+2)$ என்க)

48. $\int_0^1 \sqrt{x(x-1)}\,dx$ (B. Tech. '70)

48. $\frac{\pi}{8}$

49. $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}\,dx$ (B. Tech. '68)

49. $\frac{\pi}{16}$

50. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\,dx}{(\sec x+\tan x)^n}$ $(n>1)$

50. $\frac{n}{n^2-1}$

51. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ 51. $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$

52. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin n \cos n \, dx}{\cos^2 n + 3 \cos n + 2}$ 52. $\log \frac{9}{8}$

53. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}$ 53. $\frac{\pi}{4}$

54. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{1 + \sqrt{x}}$ 54. $\frac{5}{8} - 2 \log 2$

55. $\int_8^{15} \frac{dx}{(x - 3)\sqrt{x + 1}}$ 55 $\frac{1}{2} \log \frac{5}{3}$

56. n ஒரு நேர் முழு எண் என்றால்

$$\int_0^{n\pi} \sin^2 x \, dx = n \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$ என்று காண்பி.

§ 25. வரையறுத்த தொகைகளின் பண்புகள் (Properties of Definite Integrals)

முன்பு செய்துள்ள கணக்குகளின் மூலம் வரையறுத்த தொகைகளைக் காணும் முறையை ஒருவாறு கற்றுள்ளோம். அந்த முறையில் சில சார்புகளின் வரையறுத்த தொகைகளைக் காண்பது முடியாது அல்லது மிகக் கடினம். ஆனால் வரையறுத்த தொகைகளுக்கு சில சிறப்புப் பண்புகள் (special properties) உண்டு. அவற்றைப் பயன்படுத்தினால் சிலவற்றைத் தொகையிடல் எளிதாகும். சில சார்புகளின் தொகைகாண இந்த சிறப்புப் பண்புகளை பயன்படுத்தாமல் செய்யும், வேற்று வழிகளே இல்லை எனலாம். எனவே வரையறுத்த தொகைகளின் சில பண்புகளை ஈண்டுக் காண்போம்.

பண்பு (1).

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=a}^{t=b} f(t)\,dt$$

நிறுவல் :

$$\int f(x)\,dx = \phi(x) + c \text{ என்றால்}$$

$$\int f(t)\,dt = \phi(t) + c \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால்,
$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \Big[\phi(x) + c\Big]_{x=a}^{b} = \phi(b) - \phi(a)$$

அதேபோல்

$$\int_{t=a}^{t=b} f(t)\,dt = \Big[\phi(t) + c\Big]_{t=a}^{t=b} = \phi(b) - \phi(a)$$

ஆகையால்,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=a}^{t=b} f(t)\,dt$$

முக்கிய குறிப்பு : மேற்கூறிய பண்பு (1)-லிருந்து, வரையறுத்த தொகைகளின் மதிப்பு, தொகைச் சார்பின் மாறியைப் பொறுத்தது அல்ல என்றும், ஆனால் தொகைகளின் வரம்புகளைத் தான் பொறுத்தது என்றும் தெளிவாகிறது.

(The value of a definite integral is independent of the variable of integration, but dependent on the limits of integration) இதனால், வரையறுத்த தொகைகளில் வரும் மாறியை, "பொம்மை மாறி" (dummy variable) என்று கூறுகிறோம்.

பண்பு (2).

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

இது வெளிப்படை உண்மை.

பண்பு (3).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

நிறுவல் :

$$\int f(x)\,dx = \phi(x) + E$$ என்றால்

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \phi(c) - \phi(a)$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(c)$$

$$\therefore \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

இது மாதிரியே இந்த முடிவை விரிவுபடுத்தலாம்.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \dots \dots \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx.$$

பண்பு (4).

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

நிறுவல் :

வலப்பக்கத்துத் தொகையில் $t=a-x$ என்றும்

$dt = -\,dx$ ஆகும். மேலும் $x = 0$ என்றால், $t = a$

$x = a$ என்றால், $t = 0$

$$\therefore \int_{x=0}^{a} f(a-x)\,dx = \int_{t=a}^{0} f(t)\,(-dt)$$

$$= \int_{t=0}^{a} f(t)\,dt \text{ [பண்பு (2)]}$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx \text{ [பண்பு (1)]}$$

ஆகவே $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

குறிப்பு : வரையறுத்தத் தொகையின் பண்புகளில் மிகச் சிறப்பானது இது. இதைப் பயன் படுத்தியே பல சார்புகளின் வரையறுத்த தொகை காண வேண்டி வரும். அதனால் இதை நன்றாக நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

வரைவிலக்கணம் (Definition) :

(i) $f(-x) \equiv f(x)$ என்றால், $f(x)$ என்பதை **இரட்டைச் சார்பு** (even function) என்கிறோம்.

(ii) $f(-x) \equiv -f(x)$ என்றால், $f(x)$ என்பதை **ஒற்றைச் சார்பு** (odd function) என்கிறோம்.

தொகைச் சார்புகள் ஒற்றை அல்லது இரட்டைச் சார்புகளாக இருந்தால், சில வரையறுத்த தொகைகளைக் காண கீழ் வரும் பண்புகள் மிக்க பயனுடையதாகும்.

பண்பு (5).

$f(x)$ என்பது இரட்டைச் சார்பு என்றால்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

நிறுவல் :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்போம்.}$$

I_1-ல், $t = -x$ என்று பிரதியிட்டால்,

$dt = -dx$; மேலும் $x = -a$ என்றால், $t = a$

$x = 0$ என்றால், $t = 0$

$$\therefore\ I_1 = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(t)\,dt \text{ [பண்பு (2)]}$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \text{ [பண்பு (1)]}$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx \ [\because f(-x) \equiv f(x)]$$

(அ-து) $I_1 = I_2$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = I_2 + I_2 = 2\,I_2$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

பண்பு (6).

$f(x)$ என்பது ஒற்றைச் சார்பு என்றால்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

நிறுவல் :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$= I_1 + I_2$ என்போம்.

I_1-ல், $t = -x$ என்றால், $dt = -dx$ ஆகும்.

மேலும், $x = -a$ என்றால், $t = a$

$x = 0$ என்றால், $t = 0$

$$\therefore \quad I_1 = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt \text{ [பண்பு (2)]}$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \text{ [பண்பு (1)]}$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad [\because f(-x) \equiv -f(x)]$$

(அ - து) $I_1 = -I_2$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -I_2 + I_2 = 0$$

பண்பு (7).

$$f(a-x) \equiv f(x) \text{ ஆனல்}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^{a/2} f(x)\,dx$$

நிறுவல் :

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_{a/2}^{a} f(x)\,dx$$

$= I_1 + I_2$ என்போம்.

I_2-ல், $t = a - x$ என்று பிரதியிடு, $dt = -dx$

மேலும், $x = \frac{a}{2}$ என்ருல், $t = \frac{a}{2}$

$x = a$ என்ருல், $t = 0$

$$\therefore \; I_2 = \int_{a/2}^{0} f(a-t)(-dt)$$

$$= \int_0^{a/2} f(a-t)\,dt \quad [\text{பண்பு } (2)]$$

$$= \int_0^{a} f(a-x)\,dx \quad [\text{பண்பு } (1)]$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx \quad [\because f(a-x) \equiv f(x)]$$

(அ - து) $I_2 = I_1$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = I_1 + I_1 = 2I_1 = 2\int_0^{a/2} f(x)\,dx$$

பண்பு (8)

$$f(a - x) \equiv -f(x) \text{ ஆனால்,}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

நிறுவல் :

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_{a/2}^a f(x)\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்போம்.}$$

I_2-ல், $t = a - x$ என்று பிரதியிட்டால், $dt = -dx$

மேலும், $x = \frac{a}{2}$ என்றால், $t = \frac{a}{2}$

$x = a$ என்றால், $t = 0$

$$\therefore \; I_2 = \int_{a/2}^0 f(a - t)(-dt) = \int_0^{a/2} f(a - t)\,dt$$

[பண்பு (2)]

$$= \int_0^{a/2} f(a - x)\,dx \text{ [பண்பு (1)]}$$

$$= \int_0^{a/2} -f(x)\,dx \quad [\because \; f(a - x) \equiv -f(x)]$$

(அ - து) $I_2 = - I_1$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = I_1 - I_1 = 0$$

துணை முடிவுகள் :

1. n எந்த எண் ஆனாலும்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \quad [\text{பண்பு } (4)]$$

2. n எந்த எண் ஆனாலும்

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \quad [\text{பண்பு } (7)]$$

3. n இரட்டை முழுவெண் என்றால்

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \quad [\text{பண்பு } (7)]$$

4. n ஒற்றை முழு எண் என்றால்,

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = 0 \quad [\text{பண்பு } (8)]$$

5. $(\cos x)$-ன் படி இரட்டை முழு எண் என்றால்

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\,\cos^n x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx$$

(n இரட்டை)

6. $(\cos x)$-ன் படி ஒற்றை முழு எண் என்றால்,

$$\int_0^{\pi} \sin^m x \cos^n x\,dx = 0 \quad (n \text{ ஒற்றை})$$

மாதிரிக் கணக்கு 1 :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx \text{ என்க.} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

பண்பு (4) ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$(\text{அ - து}) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x\, dx}{\cos^n x + \sin^n x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்டினால்,

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = \Big[\, x \,\Big]_0^{\pi/2}$$

$$(\text{அ-து}) \quad 2I = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

குறிப்பு : மேலே செய்த கணக்கில், உண்மையிலேயே நாம் தொகையிடல் செய்ய வில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆனால் பண்பு (4)-ஐப் பயன்படுத்தி, நேரிடையாக தொகையிடல் செய்யாமல், விடையை எளிதில் கண்டிருக்கிறோம்.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

பண்பு (4)-ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$(1) + (2); \; 2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \, dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

ஆனால்

$$= \frac{1}{1 + \cos^2 (\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

ஆகவே பண்பு (7)-ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\therefore \quad I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{\sec^2 x + 1}$$

இதில், $t = \tan x$ என்று பிரதியிடு

$$dt = \sec^2 x \, dx$$

$x = 0$ என்றால், $t = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ என்றால், $t = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$

$$\therefore \quad I = \pi \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2 + 1} = \pi \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(\sqrt{2}) + t^2}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

(அ - து) $I = \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \,.\, \log \tan x \,.\, dx \qquad \ldots \qquad (1)$$

பண்பு (4)-ஐப் பயன்படுத்துக.

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin (\pi - 2x) \log \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \log \cot x \, dx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$(1) + (2); \; 2I = \int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \{ \log \tan x + \log \cot x \} \,.\, dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \log (1) \, dx$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad I = 0$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \; dx \quad \text{(Kerala '64)} \quad \ldots \quad (1)$$

பண்பு (4)-ஐப் பயன்படுத்தினுல்

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$\text{(அ-து)} \quad I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$(1) + (2) ; \quad 2I = \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log (\sin x \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1}{2}\right) \cdot dx + \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \cdot dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx$$

வலப்பக்கத்துத் தொகையில், $t = 2x$ என்று இடு

$dt = 2dx$; $x=0$ என்ருல், $t = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ என்ருல்

$t = \pi$ ஆகும்.

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\pi} \log \sin t \cdot \frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\cdot 2\int_{0}^{\pi/2} \log \sin t \,.\, dt$$

[பண்பு (7)]

$$(\text{அ-து}) \quad I = \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot I$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} I = \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

குறிப்பு :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x \cdot dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

மாதிரிக் கணக்கு 5 :

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx \quad (\text{B. E. '58})$$

இதில் $x = \tan\theta$ என்று பிரதியிடுக ; $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$x = 0$ என்றால், $\tan\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 0$

$x = 1$ என்றால், $\tan\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$(\text{அ-து}) \quad I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$$

பண்பு (4) ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$I = \int_0^{\pi/4} \log \left\{ 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log \left\{ 1 + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log \left\{ \frac{2}{1 + \tan\theta} \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\log 2) \cdot d\theta - \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)\, d\theta$$

(அ-து) $I = (\log 2) \cdot \frac{\pi}{4} - I$

$$\therefore \quad 2I = \frac{\pi}{4} \log 2$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{8} \log 2$$

மாதிரிக் கணக்கு 6 ;

$$\int_0^{\infty} \log\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{1 + x^2}$$

இதில் $x = \tan\theta$ எனப் பிரதியிட்டால், $dx = \sec^3\theta\, d\theta$

$x = 0$ என்றால், $\tan\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 0$

$x = \infty$ என்றால், $\tan\theta = \infty \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^\infty \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log(\tan\theta+\cos\theta)\cdot d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\log\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\log\cos\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

(மா. க. (4)-ஐப் பார்க்கவும்)

$$=-\pi\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\pi\log 2$$

பயிற்சி 19.

கீழ்வரும் வரையறுத்த தொகைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

1. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x}(a>b>0)$

2. $\int_0^{\pi/2}\log\tan x\,dx$

3. $\int_0^{\pi/2}\log\cot x\,dx$

4. $\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\tan x}$

6. $\int_0^{\pi}\frac{x\tan x\,dx}{\sec x+\tan x}$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}$ (B.E. '56 '59) (Kerala '66)

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\sin x + \cos x}$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \, dx}{\sin x + \cos x}$ (B.E. '54)

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{(\cos x)^{\frac{3}{2}} + (\sin x)^{\frac{3}{2}}} \, dx$ (B. E. '63)

12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \sin x}$ (B. E. '58

13. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + e \sin x}$ $0 < e < 1$ (B. E. '50)

15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin^{-1} x}{x} \, dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} (\cot^{-1} x)^2 \, dx$

19. $\displaystyle\int_0^{1} x (1 - x)^n \, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{(1 + x)(1 + x^2)}$

21. $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a + b - x) \, dx$ என்று காண்பிக்க.

அதனால், $\displaystyle\int_{\pi/n}^{\frac{n+1}{n}\pi} x \sin^3 x \, dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடைகள்.

1. $\dfrac{\pi}{\sqrt{a+b^2}}$ 2. 0

3. 0 4. $\pi \log\left(\dfrac{1}{2}\right)$

5. $\dfrac{\pi}{4}$ 6. $\dfrac{\pi}{2}(\pi-2)$

7. $\dfrac{\pi^2}{4}$ 8. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$ 10. $\dfrac{2\pi}{3}$ 11. $\dfrac{\pi}{4}$

12. π 13. $\dfrac{\pi^2}{2ab}$

14. $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}\left[\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right]$

15. 2 16. 0

17. $\dfrac{\pi}{2}\log 2$ 18. $\pi\log 2$

19. $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 20. $\dfrac{\pi}{4}$

[குறிப்பு கணக்கு 18: $x\cot\theta$ என்று இட்டால், $dx = -\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$ ஆகும். மேலும், $x = 0$ என்றால், $\theta = \pi/2$, $x = \infty$ என்றால், $\theta = 0$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } \int_0^{\infty} (\cot^{-1}x)^2\, dx = \int_{\pi/2}^{0} \theta^2(-\operatorname{cosec}^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = \Big[\theta^2(-\cot\theta)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$- \int_0^{\pi/2} 2\theta(-\cot\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \theta \cot\theta \, d\theta = 2\left[\theta(\log\sin\theta)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \log\sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi\log 2 \Big]$$

§26. அடுத்தடுத்து சுருக்கும் தொகைச் சூத்திரங்கள் (Reduction formulae of Integration)

சில சார்புகளை நேரடியாகவோ, அல்லது இதுவரை கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தியோ, விடை காண முடியாது. அப்போது அவைகளை அதே உருவத்தில் உள்ள, ஆனால் சில படித்தரம் குறைந்துள்ள சிறிது சுருக்கப்பட்ட தொகைகளுடன் தொடர்பு படுத்த முடியும். மேற்கண்ட தொடர்பைப் பயன்படுத்தி மேலும் சுருக்கப்பட்ட தொகை காணலாம். இம்மாதிரி தொடர்பு காணும் சூத்திரங்களை அடுத்தடுத்து சுருக்கும் தொகைச் சூத்திரங்கள் (successive reduction formulae) என்று அழைக்கிறோம். இந்தச் சூத்திரங்கள் எல்லாவற்றையும் மனப்பாடம் செய்ய வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆனால் மேற்படி சூத்திரங்களை உண்டாக்கும் முறைகளைத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

§26·1. $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$ (n ஒரு நேர் முழு எண்)

$$I_n = x^n\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int n x^{n-1}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}$$

வலப்பக்கத்துத் தொகையில் x-ன் வர்கத்தில் 1 படி குறைந்துள்ளது காண்க. மேலும் இந்தத் தொகையும் கொடுத்தத் தொகையும் ஒரே உருவத்தில் அமைந்துள்ளதையும் கவனிக்க. எனவே இதை I_{n-1} எனக் குறிப்பிடலாம்.

$$\therefore\quad I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

இது I_n ஐயும், I_{n-1} ஐயும் தொடர்பு படுத்துகிறது. எனவே இது தான் நாம் விரும்பிய அடுத்தடுத்து சுருக்கும் சூத்திரம்.

இந்தச் சூத்திரத்தைத் திரும்ப திரும்பப் பயன்படுத்தினல், x-ன் வர்க்கம் குறைந்து கொண்டே போய்

$$I_0 = \int x^0 e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

என்பதில் முடிவடையும்.

§ **26·2.** $I_n = \int x^n \sin ax\, dx$ (n ஒரு நேர் முழு எண்)

$$I_n = x^n \left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) - \int n \cdot x^{n-1}\left(\frac{-1}{a}\cos ax\right) dx$$

$$= -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$$

$$= -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\left[x^{n-1}\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) - \int (n-1)\, x^{n-2}\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) dx\right]$$

$$= -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n\,x^{n-1}}{a^2}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}\sin ax \cdot dx$$

$$\therefore\ I_n = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n\,x^{n-1}}{a^2}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

§ **26·3.** $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x\, dx$ (n முழு எண் > 0) Kerala '63

$$I_n = \Big[x^n(\sin x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n \cdot x^{n-1}\sin x\, dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left[\left\{x^{n-1}(-\cos x)\right\}_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\, x^{n-2}(-\cos x)\, dx\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left[(0-0) + (n-1)\, I_{n-2}\right]$$

(அ-து) $I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)\, I_{n-2}$

குறிப்பு : மேற்படி கணக்கில் I_3-ன் மதிப்பு வேண்டும் என்ருல்,

$$I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot I_1$$

ஆனுல் $I_1 = \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$

$$= \Big[x(\sin x) - 1 \cdot (-\cos x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\therefore \quad I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

இந்தக் கணக்கை பெர்னுல்லியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் செய்யலாம்.

§ **26·4** (a) $I_n = \int \sin^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \, . \sin x\, dx$$

$$= \sin^{n-1} x \, . (-\cos x) - \int [(n-1)\sin^{n-2} x \, . \cos x]\, (-\cos x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \,(n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \,(1-\sin^{-2} x)\, dx$$

(அ - து)

$$I_n = -\sin^{n-1} x \,.\, \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\therefore \quad (1 + n - 1) I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \,.\, \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

§ **26.4** (*b*) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. (n முழு எண் > 0)

(Kerala '64)

மேல்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுல்,

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= (0 - 0) + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(அ - து) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

வகை (1) [case (1)] : n ஒரு நேர் ஒற்றை எண் என்போம்.

பின்பு, $I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} I_{n-4}$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} I_{n-6}$$

$$= \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \ldots \ldots \frac{2}{3} I_1$$

ஆனால் $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \ldots \frac{2}{3}.$$

வகை (2) [case (2)] n ஒரு நேர் இரட்டை எண் என்போம்.

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

$$= \ldots \ldots$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \ldots \ldots \ldots \frac{1}{2} I_0$$

ஆனால், $I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0\, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \ldots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

§ **26·5.** (a) $I_n = \int \cos^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

$$I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot (\sin x) - \int [(n-1)\cos^{n-2} x\, (-\sin x)]\,(\sin x)\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x)\, dx$$

(அ-து) $I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$$\therefore \quad n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

§ 26·5 (b) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

வரையறுத்த தொகைப் பண்பு (4)-ஐப் பயன் படுத்திஞல்

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx \equiv \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

என்பது தெளிவு. எனவே § 26·5 (a)-ல் உள்ள விடைதான் (n ஒற்றை அல்லது இரட்டை முழு எண் என்ருலும்) கிடைக்கும். எனவே,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \text{ (} n \text{ ஒற்றை முழு எண்)}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(n இரட்டை முழு எண்)

§ 22·6 $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m, n இரண்டும் நேர் முழு எண்கள்).

(அ) இந்தத் தொகையில் ($\sin x$)-ன் வர்க்கத்தைக் குறைக்கலாம் அல்லது ($\cos x$)-ன் வர்க்கத்தைக் குறைக்கலாம். முதலில் ($\cos x$)-ன் வர்க்கத்தைக் குறைத்து சூத்திரம் காண்போம். பின்பு ($\sin x$)-ன் வர்க்கத்தைக் குறைத்து சூத்திரம் காண்போம்.

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \,.\, \cos x\, dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x \,.\, (\sin^m x \cos x)\, dx$$

$$= (\cos^{n-1} x)\, [\text{Int}\, (\sin^m x \cos x)]$$

$$- \int [(n-1) \cos^{n-2} x\, (-\sin x)]\, [\text{Int}\, \sin^m x \cos x]\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ (n-1)\int (\cos^{n-2} x \cdot \sin x) \cdot \frac{\sin^{m+1} x \, dx}{m+1}$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \cdot \sin^m x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \cdot \sin^m x \, (1-\cos^2 x) \, dx$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{n-1}{m+1}\right) I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

$$\therefore \quad I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \qquad (அ)$$

($\sin x$)-ன் வர்க்கத்தைக் குறைத்து வரும் சூத்திரம் பின்வருமாறு கிடைக்கும். இதைப் பயிற்சியாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \qquad (ஆ)$$

§ **26·7** $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$

(m-ம், n-ம், நேர் முழு எண்கள்)

குறிப்பு : வரையறுத்த தொகைப் பண்பு (4)-ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x \, dx = I_{n,m}$$

என்று உணரலாம்.

இப்போது § 22·6-ல் (அ) சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம். [(ஆ)-ஐப் பயன்படுத்தினாலும் அதே விளைவு தான்]

$$I_{m,n} = \left[\frac{\sin^{m+1} \cos^{n-1}}{m+n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

அதாவது, $I_{m,n} = \frac{n}{m+n} I_{m,n-2}$ ... ... (இ)

வகை (i) : — n ஒற்றை நேர் முழு எண் என்போம் (m ஒற்றை அல்லது இரட்டை நேர் முழு எண்) சமன்பாடு (இ)-மூலம்,

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

$$= \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} I_{m,n-4}$$

$$= \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdot \frac{n-5}{m+n-4} I_{m,n-6}$$

$$= \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$= \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdot \frac{n-5}{m+n-4} \cdots \frac{2}{m+3} I_{m,1}$$

ஆனால்,

$$I_{m,1} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos x \, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \quad I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdot \frac{n-5}{m+n-4} \cdots \cdots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1}$$

இதையே கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m-1} \cdot \frac{m-3}{m-3} \cdots$$

அதாவது,

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\dots \cdot (n-1)(n-3)\dots 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)} \quad \dots (1)$$

வகை (ii) :—m ஒற்றைப்படை நேர் முழு எண் என்போம். (n ஒற்றை அல்லது இரட்டை நேர் முழு எண்).

$I_{m,n} = I_{n,m}$ என்று நாம் ஏற்கெனவே காட்டியிருக்கிறோம். ஆகையால் இந்த வகைக்கும் மேலே கிடைத்த விளைவு (1) தான் வரும் என்று எளிதில் அறியலாம்.

வகை (iii) :—m, n இரண்டும் இரட்டை நேர் முழு எண்கள் என்போம்.

சமன்பாடு (இ)-லிருந்து,

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

$$= \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} I_{m,n-4}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+2} I_{m,0}$$

$$\text{ஆனால்,}\ I_{m,0} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x (\cos x)^0 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$$

$$= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(m இரட்டை நேர் முழு எண் § 26·4 (b) வகை (2) ஐக் கவனிக்கவும்).

$$\therefore \quad I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

அதாவது, $I_{m,n}$

$$= \frac{(m-1)(m-3)\ \ldots\ 3.1\ .\ (n-1)(n-3)\ \ldots\ 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

இந்த மூன்று வகைகளில் இருந்து, m, n இரண்டும் இரட்டை நேர் முழு எண்கள் ஆனுல், சூத்திரம் (2)-ஐயும், ஏதாவது ஒன்ருே அல்லது இரண்டுமே, ஒற்றை நேர் முழு எண் ஆனுல், சூத்திரம் (1)-ஐயும் பயன்படுத்த வேண்டும் என்று தெளிவாகிறது. (1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூர்ந்து நோக்கினுல், இவைகளின் உருவ வேற்றுமை அதிகம் இல்லை என்று தெரிகிறது. ஆகவே (1)-ஐயும் (2)-ஐயும் சேர்த்து பின்வருமாறு நினைவில் வைத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(m-1)\ m-3)\ \ldots\ (n-1)(n-3)\ \ldots}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ \ldots\ \ldots} K$$

இங்கே, $K = \frac{\pi}{2}$, m, n இரண்டும் இரட்டை நேர் முழு எண் என்ருல்,

அல்லது, $K = 1$, அப்படி இல்லாவிட்டால்

குறிப்பு (1) :—இந்தச் சூத்திரம் $m = 0$ அல்லது $n = 0$ என்ற வகைகளுக்கும் பொருந்தும்.

குறிப்பு (2) :— இந்தச் சூத்திரத்தை வாலி சூத்திரம் (Walli's formula) என்ற பெயர் பெறும். இதை மனப்பாடம் செய்வது அவசியமாகும்.

உதாரணம் (1).

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x\, dx = \frac{4\ .\ 2\ .\ 5\ .\ 3\ .\ 1}{11\ .\ 9\ .\ 7\ .\ 5\ .\ 31} = \frac{8}{693}$$

உதாரணம் (2). $$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{3\ .\ 1\ .\ 1}{6\ .\ 4\ .\ 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

உதாரணம் (3). $$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \frac{6 . 4 . 2 .}{7 . 5 . 3 . 1} = \frac{16}{35}$$

உதாரணம் (4). $$\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x\, dx = \frac{9 . 7 . 5 . 3 . 1}{10 . 8 . 6 . 4 . 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

§ **26·8** (*a*) $I_n = \int \tan^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \,.\, \tan^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$$= \int t^{n-2}\, dt - I_{n-2} \quad (t = \tan x)$$

$$= \frac{t^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

எனவே, $$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

§ **26·8.** (b) $I_n = \int \cot^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

மேலே § 22·8 (a)-ல் விளக்கிய முறையில் தொகையிடல் செய்தால் கீழ்வரும் சூத்திரம் கிடைக்கும்.

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - I_{n-2}$$

§ **26·9.** (a) $I_n = \int \sec^n x\, dx$ (n முழு எண் > 0)

$$I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - \int [(n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \tan x] \tan x \cdot dx$$

$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$I_n = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$

$$\therefore \quad (n-1) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

அதாவது $I_n = \dfrac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

§ **26·9** (b) $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x\, dx$ (n முழு எண் >0)

மேல் கண்ட முறைப்படி தொகையிடல் செய்தால்,

$$I_n = - \frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

§ **26·10** $I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx$ (n முழு எண் < 0)

$$I_n = \Big[x^n (-e^{-x}) \Big]_0^\infty - \int_0^\infty n x^{n-1} (-e^{-x})\, dx$$

$$= (0 - 0) \qquad + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$\therefore \quad I_n = n\, I_{n-1}$$

மேலும், $I_n = n\, I_{n-1}$

$$= n \,.\, (n-1)\, I_{n-2}$$

$$= \ldots \quad \ldots$$

$$= n (n-1)(n-2) \ldots \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, I_0$$

ஆனல், $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^0 \, dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$

$\therefore \quad I_n = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots 2 \cdot 1 = \angle n$

§ **26·11.** $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n \, dx$

(m, n இரண்டும் முழு எண்கள் > 0)

$$I_{m,n} = (\log x)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \frac{x^{m+1}}{m+1} \, dx$$

$$= \frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int (\log x)^{n-1} \cdot x^m \, dx$$

அதாவது,

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,\, n-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

துணை முடிவு :

$$f(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (\log x)^n \, dx \quad \text{என்றால்,}$$

$$f(m, n) = -\frac{n}{m} f(m, n-1) = (-1)^n \frac{\angle n}{m^{n+1}}$$

நிறுவல் :

§ 26·11-ல் உள்ள விளைவு (result) (1) ஐப் பயன் படுத்தினால்,

$$f(m, n) = \left[\frac{x^m (\log x)^n}{m} \right]_0^1 - \frac{n}{m} f(m, n-1)$$

$$= [0-0] - \frac{n}{m} f(m, n-1)$$

எனவே, $f(m, n) = -\frac{n}{m} f(m, n-1)$

$$= \left(\frac{-n}{m}\right)\left[\frac{-(n-1)}{m}\right] f(m, n-2)$$

$$= \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \left[\frac{-n}{m}\right]\left[\frac{-(n-1)}{m}\right] \cdots \left[\frac{-1}{m}\right] f(m, 0)$$

ஆனால், $f(m, 0) = \int_0^1 x^{m-1} (\log x)^0 \, dx$

$$= \left[\frac{x^m}{m}\right]_0^1 = \frac{1}{m}$$

$$\therefore \quad f(m, n) = (-)^n \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdots \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}$$

$$= \frac{(-1)^n \angle n}{m^{n+1}}$$

§ 26·12 $I_n = \int e^{ax} \sin^n bx \, dx$ (n முழு எண் > 0)

$$I_n = \int \sin^n bx \cdot e^{ax} \, dx$$

$$= \sin^n bx \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)$$

$$- \int [n \sin^{n-1} bx \cdot b \cos bx] \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right) dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin^n bx - \frac{nb}{a} \int \sin^{n-1} bx \cdot \cos bx \cdot e^{ax} \, dx$$

அதாவது, $I_n = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^n bx - \frac{nb}{a} \mho \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

இங்கே $\text{ʊ} = \int \sin^{n-1} bx \cdot \cos bx \cdot e^{ax}\, dx$

$$= (\sin^{n-1} bx \cdot \cos bx)\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)$$

$$- \int [(n-1) \sin^{n-2} bx \cdot b \cos^2 bx - b \sin^n bx] \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right) dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin^{n-1} bx \,.\, \cos bx$$

$$- \frac{b}{a}\int e^{ax} [(n-1) \sin^{n-2} bx \,.\,(1 - \sin^2 bx) - \sin^n bx]\, dx$$

$$\text{ʊ} = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^{n-1} bx \,.\, \cos bx - \frac{(n-1)\, b}{a} I_{n-2} + \frac{(n-1)\, b}{a} I_n + \,.\, \frac{b}{a} I_n$$

அதாவது,

$$\text{ʊ} = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^{n-1} bx \,.\, \cos bx - \frac{(n-1)\, b}{a} I_{n-2} + \frac{nb}{a} I_n \quad \dots \quad (2)$$

(2)-ஐ, (1)-ல் இட்டால்,

$$I_n = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^n bx - \frac{nb}{a^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx \cos bx + \frac{n(n-1)\, b^2}{a^2} I_{n-2} - \frac{n^2 b^2}{a^2} I_n$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{n^2 b^2}{a^2}\right) I_n = e^{ax}\left[\frac{1}{a} \sin^n bx - \frac{nb}{a^2} \sin^{n-1} bx \cos bx\right] + \frac{n(n-1)\, b^2}{a^2} I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2 b^2} [(a \sin bx - nb \cos bx) \sin^{n-1} bx] + \frac{n(n-1)\, b^2}{a^2 + n^2 b^2} I_{n-2}$$

§ 26·13 $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$ (m, n இரண்டும் நேர் முழு எண்கள் > 0)

$$I_{m,n} = \cos^m x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) - \int\left[-m\cos^{m-1}x\sin x\right]\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx$$

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n}\cos^m x\cos nx - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\sin x\cos nx\,dx \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது,

$$\sin(nx-x) = \sin nx\cos x - \cos nx\sin x$$

$$\therefore \quad \sin x\cos nx = \sin nx\cos x - \sin\overline{n-1}\,x$$

இதை (1)-ல் உள்ள தொகைச் சார்பில் இட்டால்,

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n}\cos^m x\cos nx - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\left[\sin nx\cos x - \sin\overline{n-1}\,x\right]dx$$

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n}\cos^m x\cos nx - \frac{m}{n}I_{m,n} + \frac{m}{n}I_{m-1,n-1}$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{m}{n}\right)I_{m,n} = -\frac{1}{n}\cos^m x\cos nx + \frac{m}{n}I_{m-1,n-1}$$

$$\therefore \quad I_{m,n} = -\frac{\cos^m x\cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}I_{m-1,n-1}$$

துணை முடிவுகள் :

(1) $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\sin nx\,dx$ என்றால்

$$I_{m,n} = \left[-\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n} \right]_0^{\pi/2} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}$$

அதாவது $I_{m,n} = \frac{1}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1} \quad \ldots \quad (A)$

(2) $I_{m,m} = \frac{1}{2^{m+1}} \left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{m-1}}{m-1} + \frac{2^m}{m} \right]$

நிறுவல் : — (A)-ல், $n = m$ என்றால்,

$$I_{m,m} = \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} I_{m-1,m-1}$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2} I_{m-2,m-2} \right]$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2^2(m-1)} + \frac{1}{2^2} I_{m-2,m-2}$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2^2(m-1)} + \frac{1}{2^3(m-2)} + \frac{1}{2^3} I_{m-3,m-3}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2^2(m-1)} + \frac{1}{2^3(m-2)} + \ldots + \frac{1}{2^m \cdot 1} + \frac{1}{2^m} I_{0,0}$$

ஆனால், $I_{0,0} = 0$

$$\therefore \quad I_{m,m} = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^2(m-1)} + \frac{1}{2^3(m-2)} + \ldots + \frac{1}{2^m . 1}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \left[\frac{2^m}{m} + \frac{2^{m-1}}{m-1} + \ldots \frac{2^2}{2} + \frac{2}{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \left[\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots \frac{2^{m-1}}{m-1} + \frac{2^m}{m} \right]$$

§ 26·14. $I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x \, dx$ (n ஒரு முழுஎண் > 1)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, (x \sin x) \, dx$$

$$= \Big[\sin^{n-1} x \, [\text{int}\, (x \sin x)] \Big]_0^{\pi/2}$$

$$- \int_0^{\pi/2} \{(n-1) \sin^{n-2} x \cos x\} \, [\text{int}\, (x \sin x] \, dx$$

$$= \Big[\sin^{n-1} x \, (-x \cos x + \sin x) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$- (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos x \, (-x \cos x + \sin x) \, dx$$

$$= 1 + (n-1) \int_0^{\pi/2} x \sin^{n-2} x \cos^2 x$$

$$- (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cos x \, dx$$

$$= 1 + (n-1) \int_0^{\pi/2} x \sin^{n-2} x \, (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$- (n-1) \int_0^1 t^n \, dt \quad (t = \sin x)$$

அதாவது, $I_n = 1 + (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n - (n-1) \cdot \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad n\, I_n = \frac{1}{n} + (n-1)\, I_{n-2}$$

அதாவது $I_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}$

துணை முடிவு :

$$I_5 = \frac{154}{225}$$

நிறுவல் :

$$I_5 = \frac{1}{5^2} + \frac{4}{5}\, I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3}\, I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad I_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \quad I_5 = \frac{1}{25} + \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{154}{225}$$

பயிற்சி 20.

I. கீழ்வரும் தொகைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க :—

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx$ 2. $\int_0^{\pi/2} \cos^{15} x\, dx$

3. $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$ (B. E. '68) 4. $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x \, dx$

6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^7\theta \, d\theta$

7. $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^8\theta \, d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} \cos^5\theta \, d\theta$

9. $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x \, dx$ (B.E. '72)

10. $\int \sec^3 x \, dx$ (B. E. '70)

11. $\int \sec^5 x \, dx$

12. $\int \cot^4 x \, dx$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{cosec}^5\theta \, d\theta$ (B. E. '61)

14. $\int_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x \, dx$

15. $\int_0^{\infty} e^{-6x} \cos 5x \, dx$ (B. E. '71)

16. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{e^x} \, dx$ B. Tech. '70)

17. $\int_0^{2a} \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ (B. Tech. '69)

18. $\int_0^{a} x \sqrt{ax - x^2} \, dx$

19. $\int_0^{1} x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - x} \, dx$ (B. Tech. '68)

20. $\int_0^{2} x^4 \sqrt{4 - x^2} \, dx$ (B. E. '71)

21. $\int_0^{1} x^6 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

22. $\int_0^{a} x^4 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

23. $\int (\log x)^5 \, x^6 \, dx$

24. $\int_0^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1 - x^2}}$

25. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3}$ (B. E. '55)

II கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக :—

1. $\int_0^{\alpha} e^{-x} x^6 \, dx$

$= -e^{-\alpha}[\alpha^6 + 6\alpha^5 + 30\alpha^4 + 120\alpha^3 + 360\alpha^2 + 720\alpha + 720]$ (B. E. '72)

2. $I_n = \int x^n e^x \, dx$ என்றால்,

$I_n + n I_{n-1} = x^n e^x$

இதனைப் பயன்படுத்தி I_4 காண்க.

விடை : $e^x \{ x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 \}$

3. $u_n = \int_0^a x^n e^{-x} \, dx$ என்றால்

$u_n - (n + a) u_{n-1} + a(n - 1) u_{n-2} = 0$

4. $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} \, dx$ (n முழு வெண் > 1)

என்றால் $I_n = \frac{1}{2}(n - 1) I_{n-2}$

மற்றும் $I_{2n+1} = \frac{1}{2} \angle n$

5. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ என்றால்

$2(n - 1) a^2 I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3) I_{n-1}$

6. $I_m = \int x^m \sqrt{2ax - x^2} \, dx$ என்றால்,

$$I_m = -\frac{x^{m-1}(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2} + \frac{(2m+1)a}{m+2} I_{m-1}$$

மேலும், $u_m = \int_0^{2a} x^m \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ என்றால்

$$U_m = \frac{\pi \cdot a^{m+2} \;\lfloor 2m+1}{2^m \lfloor m \;\lfloor m+2}$$

இதைப் பயன் படுத்தி,

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{7\pi a^5}{8}$$ என்று காட்டுக.

7. $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n\, dx$ என்றால்

$$I_n = \frac{2\,na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

8. $U_n = \int \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$ என்றால்

$$U_{n+2} = \int \frac{x^{n+1}}{n+1} - U_n$$

இதன் மூலம் U_6ஐக் காண்க.

(விடை : $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x - \tan^{-1} x + c$)

9. $I_{m,\,n} = \int x^m \sin nx\, dx$ என்றால்,

$$I_{m,\,n} = -\frac{x^m \cos nx}{n} + \frac{m}{n^2} x^{m-1} \sin nx - \frac{m(m-1)}{n^2} I_{m-2,\,n}$$

10. $U_{m, n} = \int x^m \cos nx \, dx$ என்றால்,

$$U_{m, n} = \frac{x^m \sin nx}{n} + \frac{m}{n^2} x^{m-1} \cos nx - \frac{m(m-1)}{n^2} I_{m-2, n}$$

11. $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$ என்றால்

$$I_n + n(n-1) I_{n-2} = n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$ (Kerala'66)

12. $U_n = \int x \cos^n x \, dx$ என்றால்,

$$U_n = \frac{x \sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{\cos^{n-1} x}{n^2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

13. $I_n = \int_0^{\pi/2} x \cos^n x \, dx$ என்றால்

$$I_n = -\frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

14. $I_{m, n} = \int \sin^m x \cos nx \, dx$ என்றால்,

$$= \frac{\sin^m x \cdot \sin nx}{m+n} - \frac{m}{m+n} I_{m-1, n-1}$$

15. $I_{m, n} = \int \cos^m x \cos nx \, dx$

$$= \frac{\cos^m x \sin nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1, n-1}$$

இதன் மூலம் $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}}$

16. $I_{m,n} = \int \sin^m x \sin nx \, dx$

$$= \frac{\sin^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,\, n-1}$$

17. $I_m = \int_0^\infty e^{-x} \sin^m x \, dx$ என்றால்,

$$I_m = \frac{m(m-1)}{1+m^2} I_{m-2}$$

இதன் மூலம் $\int_0^\infty e^{-x} \sin^4 x \, dx = \frac{24}{85}$ என்று காண்பி.

18. $I_{m,n} = \int x^m (1-x)^n \, dx$ என்றால்,

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}(1-x)}{m+n+1} + \frac{n}{m+n+1} I_{m,\, n-1}$$

மேலும் $u_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$

$$= \frac{\angle n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}$$

விடைகள்—(I)

1. $\frac{35\pi}{256}$ 2. $\frac{2048}{6435}$

3. $\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

4. $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$ 5. $\frac{1}{60}$

6. $\frac{32}{315}$ 7. $\frac{7\pi}{2048}$

8. $\dfrac{64}{231}$ 9. $\dfrac{1}{2}(\log 2 - 1)$

10. $\dfrac{1}{2}\sec x \tan x + \dfrac{1}{2}\log(\sec x + \tan x) + c$

11. $\dfrac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \dfrac{1}{2}\sec x \tan x$

$+ \dfrac{3}{8}\log(\sec x + \tan x) + c$

12. $-\dfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$

13. $\dfrac{11\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{8}\log(2 + \sqrt{3})$ 14. $\dfrac{3\pi^2}{512}$

15. $\dfrac{6}{51}$ 16. $\dfrac{1}{2}\left(1 + e^{-\pi}\right)$

17. $\dfrac{5\pi a^3}{2}$ 18. $\dfrac{\pi a^3}{13}$ 19. $\dfrac{\pi}{16}$

20. 2π 21. $\dfrac{5\pi}{256}$ 22. $\dfrac{\pi a^6}{32}$

23. $\dfrac{x^6}{6}\Big[(\log x)^5 - \dfrac{5}{6}(\log x)^4 + \dfrac{5}{9}(\log x)^3$

$- \dfrac{5}{18}(\log x)^2 + \dfrac{5}{54}(\log x) - \dfrac{5}{324}\Big] + c$

24. $\dfrac{(4n-1)(4n-3)\ldots 1}{4n(4n-2)\ldots 2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ 25. $\dfrac{3\pi}{16}$.

§ 27. தொடர் கூட்டல் முறையில் தொகையிடல் (Integration as a summation) :

$f(x)$ என்பது (a, b) என்ற மூடிய இடைவெளி (closed interval), அதாவது $a \leqslant x \leqslant b$-ல் வழங்கும் ஒரு சார்பு என்போம். (a, b) என்ற இடைவெளியை $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, என்ற புள்ளிகளால், $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots \ldots (x_{n-1}, x_n)$ ஆகிய n-துணை இடைவெளிகளாகப் (sub interval) பிரி. X_r என்பது (x_{r-1}, x_r) என்ற துணை இடைவெளியின் யாதாமொரு (arbitrary) புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

$$S_n = f(X_1)(x_1 - x_0) = f(X_2)(x_2 - x_1) + \dots \dots + \dots + f(X_n)(x_n - x_{n-1})$$

அதாவது $$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(X_r)(x_r - x_{r-1}) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற தொடர் கூட்டலின் மதிப்பைக் (sum of the series) காண்க.

(1)-ல் $|x_r - x_{r-1}| \to 0$ மற்றும் $n \to \infty$ ஆகும்போது, S_n ஒரு குறிப்பிட்ட (definite) எல்லை மதிப்பு (limit) பெறும். இந்த எல்லை மதிப்பை நாம் a-முதல் b-வரையில் படும் $f(x)$-ன் வரையறுத்த தொகை (definite integral of $f(x)$ between the limits a and b) என்று கூறுகிறோம். இதை $\int_a^b f(x)\,dx$ என்று குறியீடு செய்து எழுதுகிறோம்.

$$\therefore \int_b^b f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lt}\, S_n$$

$$= \underset{\substack{|x_r - x_{r-1}| \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \sum_{r=1}^{n} f(X_r)(x_r - x_{r-1}) \quad \dots \quad (2)$$

(2)-ல் உள்ள தொடர் கூட்டல் மதிப்பு காண்பது, நாம் நினைப்பதுபோல், அவ்வளவு எளிய செயல் அல்ல. (2)-ல் உள்ள துணை இடைவெளிகள் சம அளவினதாக இருக்க வேண்டும் என்கிற அவசியம் இல்லை. எனவே பின்வரும் முறையைக் கையாண்டால், சூத்திரம் (2) சற்று எளிய உருவம் பெறும்.

(x_{r-1}, x_r) என்ற துணை இடைவெளியில் யாதாமொரு புள்ளியாக X_r-ஐ எடுத்துக் கொள்வதற்குப் பதிலாக, $X_r = x_{r-1}$ ஆக எடுத்துக் கொள்க. மேலும் எல்லா துணை இடைவெளிகளையும் சம அளவினதாக எடுத்துக் கொள்க. இதனால்

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots \dots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n} = h$$

என்போம்.

ஆகவே $x_1 = x_0 + h = a + h$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + h + h = x_0 + 2h = a+2h$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_r = x_0 + rh = a + rh$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n = x_0 + nh = a + nh$$

எனவே சூத்திரம் (2) பின்வரும் மாறுதல் அடையும்

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lt} S_n = \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \left[h \sum_{r=1}^{n} f(a + \overline{r-1}\, h \right]$$

அல்லது

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \left[h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) \right] \quad \cdots \quad \cdots \qquad (3)$$

துணை முடிவு :

(3)-ல், $a = 0, b = 1$ என்றால், $h = \dfrac{1}{n}$

$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right) \right]$$

அல்லது,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \right] \quad \cdots \qquad (4)$$

குறிப்பு : (1) எளியதுபோல் காணப்படும் சூத்திரம் (3)-ஐப் பயன்படுத்தி சில சார்புகளின் வரையறுத்த தொகை காணல் அறிமுறையில் (in theory) இயலும் என்றாலும் செய்முறையில் (in practice) மிகக் கடினம் என்றும், § 26. வரை விளக்கிய முறைகளில் தொகை காண்பது தான் எளிது என்றும் நாம் உணர வேண்டும்.

(2) : (3)-ல் உள்ள தேற்றத்தை கூட்டுத் தொகை முதல் விதி என்று கொள்ளலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

என்று கூட்டுத் தொகை முதல் விதிப்படி காண்பிக்கவும்.

இங்கே $f(x) = x^2,\ h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\therefore \int_a^b x^2\, dx = \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \Big[h \Big\{ a^2 + (a+h)^2 + (a+2h)^2 + \dots + (a + \overline{n-1}\, h)^2 \Big\} \Big]$$

$$= \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \Big[h \Big\{ na^2 + 2ah\,(1 + 2 + 3 + \dots + \overline{n-1}) + h^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \overline{n-1}^2) \Big\} \Big]$$

$$= \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \Big[h \Big\{ na^2 + 2ah \frac{(n-1)\,n}{2} + h^2 \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \Big\} \Big]$$

$$= \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \Big[a^2\, nh + a\,(nh)^2 \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{6}(nh)^3 \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(2 - \frac{1}{n}\Big) \Big]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \Big[a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{6}(b-a)^2 \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(2 - \frac{1}{n}\Big) \Big]$$

$$(\because\ nh = b - a)$$

$$= \left[a^2 (b-a) + a (b-a)^2 + \frac{1}{3} (b-a)^3 \right]$$

$$= \frac{b-a}{3} [3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2]$$

$$= \frac{b-a}{3} [3a^2 + 3ab - 3a^2 + b^2 - 2ab + a^2]$$

$$= \frac{b-a}{3} (b^2 + ba + a^2)$$

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

மாதிரிக் கணக்கு 2 :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

$$C = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$ என்போம்.

$$C + iS = \int_0^{\pi/2} (\cos x + i \sin x) \, dx = \int_0^{\pi/2} e^{ix} \, dx$$

இங்கே $f(x) = e^{ix}$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{2n}$

$$\therefore \quad C + iS = \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \left[h \{ e^{i \cdot 0} + e^{ih} + e^{i2h} + \dots + e^{i(n-h)} \} \right]$$

$$= \underset{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}}{Lt} \left[h \left\{ \frac{e^{inh} - 1}{e^{ih} - 1} \right\} \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \left[\frac{h}{ih + \frac{i^2 h^2}{\angle 2} + \frac{i^3 h^3}{\angle 3}} \left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{i} \left(e^{i \frac{\pi}{2}} - 1 \right)$$

$$= -i \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} - 1 \right]$$

$$\therefore \quad e = i\,S = 1 + i$$

மெய்பகுதிகளையும், கற்பணைப் பகுதிகளையும் சமன்படுத்திய பிறகு,

$$C = 1 = S$$

அதாவது. $$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1.$$

§ 28. தொகையிடல் முறையில் தொடர் கூட்டல் காணல் (Summation of series using Integration) :

§ 27-ல், தொடர் கூட்டல் முறையில், வரையறுத்த தொகை கண்டோம். சூத்திரம் (4)-ஐப் பயன் படுத்தி, சில தொடர் கூட்டல்களின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\sum_{\gamma=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{\gamma}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x)\, dx \quad \ldots \quad (4)$$

(4)-ன் இடப்பக்கத்தில் உள்ளதுபோல் உருவ அமைப்பு கொண்ட தொடர்களின் மதிப்புகளைத் தான், வலப்பக்கத்தில் உள்ள தொகை மூலம் காணமுடியும்.

விதி :—கொடுத்த தொடரை, முதலில் $\sum$ உருவத்தில் எழுதுக. பிறகு $\frac{1}{n}$-ஐக் காரணியாக்கி மற்றவற்றை $\left(f \frac{\gamma}{n} \right)$ என்ற உருவத்தில் மாற்றுவது அவசியம். $\sum$-க்குப் பதிலாக

$\int$-ம், $\frac{\gamma}{n}$-க்குப் பதிலாக x-ம், $\frac{1}{n}$-க்குப் பதிலாக dx-ம் இட வேண்டும். கடைசியாக கீழ் வரம்பு (lower limit)

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{\gamma}{n}\right]_{\gamma=0} \text{-ன்}$$

மதிப்பாகவும் மேல் வரம்பு (upper limit)

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{\gamma}{n}\right]_{\gamma=n-1} \text{-ன்}$$

மதிப்பாகவும் கொண்டு தொகையிடல் செய்ய வேண்டும்.

குறிப்பு :

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta} \frac{1}{n} f\left(\frac{\gamma}{n}\right)$$

என்ற தொடர் கூட்டலின் மதிப்பைக் காண, மேலே கூறிய விதியைக் கையாளலாம். ஆனால் கீழ் வரம்பு

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{\gamma}{n}\right]_{\gamma=\alpha} \text{-ன்}$$

மதிப்பாகவும் மேல் வரம்பு

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{\gamma}{n}\right]_{\gamma=\beta} \text{-ன்}$$

மதிப்பாகவும் கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1 :

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}\right]$$

கொடுத்துள்ள தொடர்

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{n^2}{n^3} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{n^2}{(n+n)^3}\right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{n^2}{(n+\gamma)^3} \right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{n^3}{n(n+\gamma)^3}$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x)^2} \right]_{x=0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - 1 \right]$$

$$= \frac{3}{8}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{4n}{17n^2} \right]$$

கொடுத்துள்ள தொடர்

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{4^n}{n^2+(4n)^2} \right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\sum_{\gamma=1}^{4n} \frac{\gamma}{n^2+\gamma^2} \right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{\gamma=1}^{4n} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{\gamma}{n}}{1 + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^2} \right]$$

$$= \int_0^4 \frac{x\, dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\log (1 + x^2) \Big]_0^4 = \frac{1}{2} \log 17$$

மாதிரிக் கணக்கு 3 :

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - r^2} \text{ (B. E. '55, '57)}$$

கொடுத்துள்ள தொடர்

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \cos \theta \, d\theta \qquad (x = \sin \theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$K =$ கொடுத்துள்ளதின் மதிப்பு என்றால்,

$$\log K = \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \log \left(1 + \frac{r^2}{n^2}\right)^2\right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \log \left[1 + \left(\frac{r}{n}\right)^2\right]$$

$$= \int_0^1 \log (1 + x^2)\, dx$$

$$= \Big[\log (1 + x^2) \cdot x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \log 2 - 2 \int_0^1 \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \log 2 - 2 \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right] dx$$

$$= \log 2 - 2\, [x - \tan^{-1} x]_0^1$$

$$= \log 2 - 2 \left[1 - \frac{4}{\pi}\right]$$

அதாவது,

$$\log K = \log 2 \, . + \frac{\pi - 4}{2}$$

$$\log\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{\pi - 4}{2}$$

$$\therefore \quad K = 2e^{\frac{\pi - 4}{2}}$$

பயிற்சி 21.

I. கீழ்க்கண்ட தொகைகளைத் தொடர் கூட்டல் முறையில் காணவும் :

1. $\displaystyle\int_a^b x^3\, dx$ 2. $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x}\, dx$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ 4. $\displaystyle\int_a^b e^x\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 (ax + b)\, dx$ 6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

II. கீழ்வரும் தொடர்களின் மதிப்பை தொகையிடல் மூலம் காண்க.

1. $\displaystyle\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$

2. $\displaystyle\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{5n}\right]$

3. $\displaystyle\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{9}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$

4. $\displaystyle\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right]$

(B. E. '55, '61)

5. $\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - r^2}}$

6. $\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + r^2}}$

7. $\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n}{(n + 3r)^3}}$

8. $\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n^3} \sqrt{n^2 + r^2}$

9. $\underset{n \to \infty}{Lt} [\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}] / n\sqrt{n}$

10. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{2}{n^2 + 2^2} + \frac{3}{n^2 + 3^2} + \dots \right.$
$\left. \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right]$

11. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{3n + 1} + \frac{1}{3n + 2} + \dots \dots + \frac{1}{4n} \right]$

12. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{1 + n^3} + \frac{4}{8 + n^3} \right.$
$\left. + \frac{9}{27 + n^3} + \dots n \right.$ உறுப்புகள் $\left. \right]$

13. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{n + 1}{n^2 + 1^2} + \frac{n + 2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n} \right]$

14. $\underset{n \to \infty}{Li} \left[\sqrt{\frac{n - 1}{n + 1}} + \sqrt{\frac{n + 2}{n - 2}} \right.$
$\left. + \dots \dots + \sqrt{\frac{2n - 1}{1}} \right] / n$

15. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{\sqrt{2n - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n - 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{6n - 3^2}} + \dots \dots + \frac{1}{n} \right]$$

16. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\sin^{2k} \frac{\pi}{2n} + \sin^{2k} \frac{2\pi}{2n} + \dots + \sin^{2k} \frac{\pi}{2} \right] \Big/ n$$

17. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{1/n}$$

18. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2/n^2} \cdot \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right)^{4/n^2} \cdot \dots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)^{2n/n^2}$$

19. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\tan \frac{\pi}{2n} \cdot \tan \frac{2\pi}{2n} \dots \tan \frac{n\pi}{2n} \right]^{1/n}$$

20. $$\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \dots \frac{n}{n} \right]^{1/n}$$

விடைகள்.

I. 1. $\frac{1}{4}(b^4 - a^4)$ 2. $\frac{2}{3}(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$

3. $\frac{1}{2}$ 4. $e^b - e^a$

5. $\frac{a}{2} + b$ 6. $\frac{\pi}{4}$

II. 1. $\log 2$ 2. $\log 5$

3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

5. $\frac{\pi}{6}$ 6. $\log(1 + \sqrt{2})$

7. $\frac{1}{3}$ 8. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

9. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

10. $\frac{1}{2}\log^2$

11. $\log\left(\frac{4}{3}\right)$

12. $\frac{1}{3}\log^2$

13. $\frac{1}{2}\log^2 + \frac{\pi}{4}$

14. $\frac{\pi}{2} + 1$

15. $\frac{\pi}{2}$

16. $\frac{\angle 2k}{(2^k \angle k)^2}$

17. $\log\left(\frac{4}{e}\right)$

18. $\frac{4}{e}$

19. 1

20. $\frac{1}{e}$

2. உயர் திரிகோண கணிதம்

(Higher Trigonometry)

§ 1. திரிகோண கணித தொடக்க சூத்திரங்கள்

1. π ஆரையன் (Radian) $= 180°$

1 ஆரையன் (one Radian) $= 57°\ 17'\ 44{\cdot}8''$

ஒரு வட்ட வில்லின் நீளம் $= r \times \theta$
(length of a circular arc)

[r = ஆரம் (radius); θ = அமைகோணம், ஆரையன் அலகில் எழுதப்பட வேண்டும். (included angle expressed in radian)]

2. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ \tan\theta;\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

3. சில முக்கிய கோணங்களின் திரிகோண விகிதங்கள்

கோணம் $\theta°$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞
180°	0	-1	∞

4. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos\theta$; $\cos(90^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$

$\sin(180^\circ \mp \theta) = \pm\sin\theta$; $\cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$

$\sin(270^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$; $\cos(270^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta$

5. $\sin\theta = \sin\alpha$ என்றால், $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\cos\theta = \cos\alpha$ என்றால், $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

$\tan\theta = \tan\alpha$ என்றால், $\theta = n\pi + \alpha$

6. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

7. $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

8. $$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

9. $$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1 = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 + \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

10. $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

11. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

12. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a (M^n) = n \log_a M$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

§ 2. கலப்பு எண்கள் (Complex Numbers)

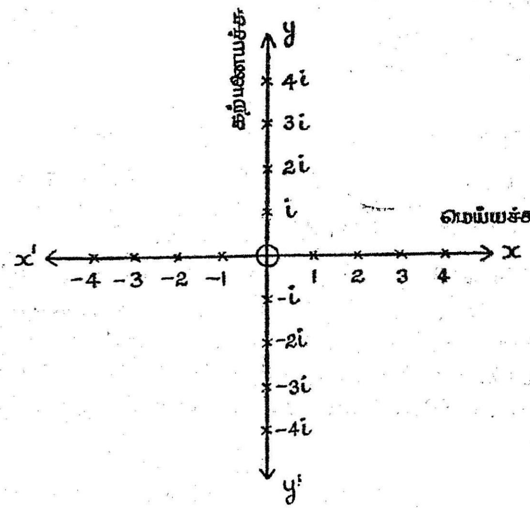
1, 2, 3, ... −1, −2, −3, ... ஆகிய எண்களை முழு எண்கள் (Integer) என்றும், $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{-9}{11}$, $\frac{-13}{21}$, ... ஆகியவற்றை விகிதமுறும் எண்கள் (rational numbers) என்றும், $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{14}$, ... ஆகியவற்றை விகிதமுறா எண்கள் (irrational numbers) என்றும் கூறுகிறோம். மேற்கூறிய மூன்று எண் வகைகளை மொத்தமாக மெய்யான எண்கள் அல்லது மெய்யெண்கள் (Real Numbers) என்று வழங்குகிறோம்.



படம் 1.

ஒரு நேர்கோட்டை எடுத்துக் கொள்க (படம் 1). அதன் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை 0 (பூச்சியம்) என்று குறிக்கவும்,

நமக்கு விருப்பமான ஏதாவது ஓர் அளவுத் திட்டத்துடன் (scale), 1, 2, 3 ... ஆகிய நேர் முழு எண்களை 0-ன் வலப் பக்கத்திலும், $-1, -2, -3, \ldots$ ஆகிய எதிர் முழு எண்களை (negative integers) 0-ன் இடப் பக்கத்திலும் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அதே மாதிரி $\frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{-13}{17}, \ldots$ ஆகிய விகிதமுறும் எண்களையும், $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{14}$, ... போன்ற விகிதமுரு எண்களையும் அந்த நேர் கோட்டில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். ஆனால் $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-17}$ போன்ற எண்களை அந்த நேர்க்கோட்டில் புள்ளிகளாகக் குறிக்க அறவே இயலாது என்பதை நாம் உணரவேண்டும். ஆகவே, இம்மாதிரி எண்களை கற்பனை எண்கள் (imaginary numbers) என வழங்கப்பட்டன. தொகு வடிவ கணிதத்தில் (Pure geometry) இம்மாதிரி கற்பனை எண்கள் நேர்முகமாக பயன்படுவதில்லை என்றாலும், மிக எளிய இயற்கணித சமன்பாட்டுகளில் (algebraic equations) அடிக்கடி மூலங்களாக (roots) வருகின்றன. ஆகவே இந்தக் கற்பனை எண்களையும் வரைபடத்தில் குறிக்கும் வகை



படம் 2.

காணவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. கார்ல் ஃபிரடெரிக் காவுஸ் (Karl Frederik Gauss) என்ற ஜெர்மானிய கணித மேதை கற்பனை எண்களை வரைபடம் மூலம் குறிக்கும் விதத்தைக் கண்டு பிடித்தார். ஆனால் அதைப் பல நாட்கள் வரை வெளியிடாமலே இருந்தார். அதற்குள் ஆர்கன்ட் (Argand) என்பவரும் கற்பனை

எண்களை வரைபடத்தில் குறிக்கும் முறையைக் கண்டறிந்தார். மேலும், காவுஸ் வெளியிடும் முன்பே இவர் வெளியிட்டு விட்டதால், கற்பனை எண்களைக் குறிக்கும் வரைபடத்தை ஆர்கன்ட் வரைபடம் (Argand Diagram) என்கிறோம். சில சமயங்களில் காவுஸ் வரைபடம் என்றும் கூறுகிறோம்.

ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு நேர்கோடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒன்றை மெய் அச்சு (Real axis) என்றும் மற்றொன்றைக் கற்பனை அச்சு (imaginary axis) என்றும் கூறுவோம் (படம் 2) ஐக் காண்க. (அவைகளை X-அச்சு, Y-அச்சு என்று கூறினாலும் தவறில்லை). $\sqrt{-1}$ ஐ "i" என்று குறியீடு செய்தால், $\sqrt{-4} = 2i$ என்றும், $\sqrt{-9} = 3i$ என்றும், $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\, i$ என்றும் ஆகும். எனவே, இம்மாதிரி கற்பனை எண்களில் $\sqrt{-1} = i$ என்ற அலகு (unit) இடம் பெறுகிறது. எல்லாக் கற்பனை எண்களையும் i என்னும் குறியீடு மூலம் விளக்கலாம். $i = \sqrt{-1}$ என்பதால். $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$, $i^5 = +i$, $i^6 = -1$, ... என்பதை நினைவில் கொள்க.

நமக்கு விருப்பமான அளவுத் திட்டம் கொண்டு i, $2i$, $3i$, ..., $-i$, $-2i$, $-3i$ ... ஆகிய கற்பனை எண்களைக் கற்பனை அச்சில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அதேபோல், $\frac{5i}{7}$, $-\frac{13i}{19}$, $\sqrt{3}\, i - \sqrt{11}\, i$ போன்ற கற்பனை எண்களையும் மேற்படி கற்பனை அச்சில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். i, $2i$, $-5i$, $\sqrt{7}\, i$, $-\frac{9i}{13}$ போன்று bi உருவத்திலுள்ள கற்பனை எண்களைத் தூய கற்பனை எண்கள் (pure imaginary numbers) என்று கூறுகிறோம். a ஏதாவது ஒரு மெய்யெண், bi ஏதாவதொரு தூய கற்பனை எண் என்றால், $a + bi$ என்பது மெய்யெண், கற்பனை எண் கலந்த கலப்பெண் என்பது தெளிவு. எனவே $a + ib$ (a, b மெய்யெண்கள்) உருவமுள்ள எந்த எண்ணையும் கலப்பெண் (complex number) அல்லது சிக்கலெண் என்று வழங்குகிறோம். மேற்கூறிய மெய்யெண், கற்பனை எண் ஆகியவற்றை வரை படத்தில் குறிக்கும் முறையைக் கூர்ந்து நோக்கினால், $a + ib$ என்ற கலப்பெண்ணைக் குறிக்கும் முறையை உடனே உணரலாம். அதாவது $a + ib$ என்ற கலப்பெண், மெய் அச்சு, கற்பனை அச்சு இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட தளத்தில் (plane of the real and imaginary axes) ஒரு புள்ளி என்று பெறப்படுகிறது. அந்தப் புள்ளியின் மெய் அச்சுத்தூரம் a என்றும், கற்பனை அச்சுத் தூரம் b என்றும் தெளிவாகிறது.

மெய் அச்சு, கற்பனை அச்சு என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக x-அச்சு, y-அச்சு என்று எடுத்துக்கொண்டால், ஆயத்தொலை வடிவ கணித (co-ordinate geometry) முறையில் $(a+ib)$ என்ற எண், (a, b)-களை ஆயத் தொலைகளாகக் (co-ordinates) கொண்ட ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும் அல்லவா? இதிலிருந்து ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணுக்கு பொருத்தமாக (correspondingly) ஒரே ஒரு புள்ளி உண்டு என்றும், அதேபோல் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருத்தமாக ஒரே ஒரு கலப்பெண் உண்டு என்றும் தெளிவாகிறது. எனவே, $a+ib$ என்பதை கலப்பெண் $a+ib$, புள்ளி (a, b) என்று பாகுபாடு செய்யாமல் இனி குறிக்கப்படும்.

§3. கலப்பு எண்களின் செய்கைகள் (Operations on Complex numbers)

1. இரண்டு கலப்பு எண்கள் சமம் என்றால், அவைகளின் மெய்யெண்கள் சமமாயிருத்தல் வேண்டும் அவைகளின் கற்பனை எண்கள் சமமாயிருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, $a+ib=c+id$ என்றால்

$a=c$ மற்றும் $b=d$

நிறுவல் : $a+ib=c+id$

$$\therefore \quad (a-c)=i(d-b)$$

$$\therefore \quad (a-c)^2=-(d-b)^2=-(b-d)^2$$

$$\therefore \quad (a-c)^2+(b-d)^2=0.$$

இரண்டு வர்க்க எண்களின் கூடுதல் பூச்சியம் என்றால், அவை தனித்தனியே பூச்சியம் ஆகும்.

எனவே $a-c=0, \; b-d=0$

அதாவது $a=c, \; b=d.$

2. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

3. $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

4. $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$

5. $$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

குறிப்பு : மேலே (2) முதல் (5) வரை உள்ள சமன்பாடுகளை நன்கு நோக்கினால், இரண்டு கலப்பு எண்கள். $+, -1, \times, \div$ ஆகிய செய்கைகளால் (operations) மற்றொரு கலப்பு எண்ணையே கொடுக்கிறது என்பது தெளிவு.

6. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (மெய்யெண்)

குறிப்பு : இந்த இரண்டு கலப்பு எண்கள், $\times$ என்ற செய்கையால், மெய்யெண்ணாக மாறுகின்றன.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கலப்பு எண்ணிலிருந்து i-க்குப் பதிலாக $-i$ மாற்றிக் கிடைக்கும் கலப்பு எண், முதல் எண்ணின் இணைக்கலப்பு எண் (conjugate complex number) என்று சொல்லப் படும்.

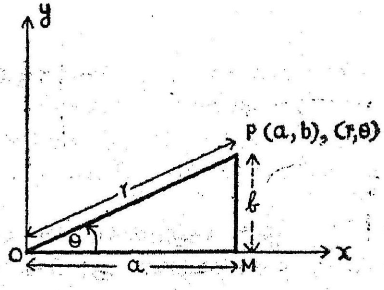
அதாவது, $a + ib$-ன் இணை $a - ib$; $a - ib$-ன் இணை $a + ib$ என்பதாகும்.

§ 4. கலப்பெண்களின் மட்டு வீச்சு — உருவம் (Modulus — Amplitude form)

ஆயத்தொலை கணிதத்தில், ஒரு புள்ளியின் கார்டீசியன் ஆயத்தொலைகள் (cartesian co-ordinates) (a, b). மற்றும் அதன் துருவ ஆயத்தொலைகள் (polar co-ordinates) (r, θ) என்றால்,

$$a = r\cos\theta; \; b = r\sin\theta$$

என்று நாம் அறிவோம் (படம் 3)



படம் 3.

எனவே $a + ib$ என்ற கலப்பு எண்ணை

$$a + ib \equiv r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

என்றும் எழுதலாம். இந்த உருவத்தில் ஒரு கலப்பு எண் எழுதப் பட்டால், அதை மட்டு — வீச்சு உருவத்தில் (modulus—amplitude form) அல்லது (Demoivre's form) தீமாய்வர் உருவத்தில் உள்ள கலப்பு எண் என்று கூறுவர்.

$$r(\cos\theta + i\sin)\theta \equiv a + ib \text{ என்றால்,}$$

$$r\cos\theta = a$$

$$r\sin\theta = b.$$

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{a^2+b^2}$$

ஆனால், r-ஐ எப்போதும், நேர் எண்ணாக எடுத்துக்கொள்வது மரபு

அதாவது $\boxed{r = +\sqrt{a^2+b^2}}$ ... ... (1)

மேலும் $\boxed{\cos\theta = \dfrac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \dfrac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}}$ ... ... (2)

(1)-ல் உள்ள $r = +\sqrt{a^2+b^2}$-ஐ, மட்டு (modulus) என்று கூறுவர்.

(2)-லிருந்து, θ-வுக்குப் பல மதிப்புகள் கிடைக்கும் அவைகளை வீச்சங்கள் (amplitudes or arguments) என்றும், அவைகளில், $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள கோண மதிப்பை தலையாய வீச்சம் (principal amplitude) என்றும் கூறுவர்.

முக்கிய குறிப்பு: 1. இனி வருவனவற்றில் வீச்சம் என்று குறிப்பிடும்போது தலையாய வீச்சத்தையே குறிப்பதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

2. a, b ஆகியவற்றில் மதிப்புகள் தெரியாதபோது, வீச்சம் $= \theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ என்று சுருக்கமாக எழுதலாம். ஆனால் a, b

இவைகளின் மதிப்பு தெரியும்போது, சமன்பாடு (2)-ஐப் பயன் படுத்தி $\left[\theta \tan^{-1} \frac{b}{a}\right.$ அல்ல $\left.\vphantom{\frac{b}{a}}\right]$ θ-வுக்குச் சரியான கோணம் கண்டு பிடிக்கப்படவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு

மட்டு — வீச்சம் உருவத்தில் மாற்றுக :

1. $-1+i\sqrt{3}$ 2. $\frac{1+i}{1-i}$ 3. $\frac{i}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$

(B. E. '64 Osmania)

1. $-1+i\sqrt{3} \equiv r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்போம்.

$\therefore \quad r\cos\theta = -1$

$r\sin\theta = \sqrt{3}$

$r = +\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = +2$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{-1}{2}\;;\; \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad -1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

2. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1^2+1^2} = i$

$i \equiv r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்றால்

$r\cos\theta = 0$

$r\sin\theta = 1$

$\therefore \quad r = +\sqrt{0^2+1^2} = +1$

$\therefore \quad \cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3. $$\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]\left[\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

இங்கே மட்டு $=\frac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}$; வீச்சம் $=-\frac{\theta}{2}$.

§5. டிமாய்வர் தேற்றம் (De Moivoe's Theorem)

(அ) n ஏதாவது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழு எண் என்ருல் (n is any + *ve or* − *ve* integer)

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(ஆ) n ஏதாவது ஒரு நேர் அல்லது எதிர், விகித முறும் பின்னம் என்ருல் (n is any + *ve or* − *ve* rational fraction)

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$-ன் பல மதிப்புகளில் ஒன்று $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ஆகும்.

நிறுவல்:—n என்ற எண்ணை மூன்று வகையாகப் பிரித்து நிறுவல் செய்வோம்.

வகை (cos) 1: n **நேர் முழு எண் என்போம்**

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

இதே மாதிரி பெருக்கிக் கொண்டே போனால்,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)\ldots$$
$$\ldots = \cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)-ல், $\alpha, \beta\ \gamma, \ldots$ என n கோணங்களை எடுத்துக் கொண்டு, ஒவ்வொன்றுக்கும் θ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

என்று கிடைத்துவிடும்.

வகை 2 :

n எதிர் முழு எண் என்போம். அதாவது, $n = -m (m > 0)$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$

$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \quad [\text{வகை } (1)]$$

$$= \frac{\cos m\theta + i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$$

$$= \frac{\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)}{1}$$

அதாவது,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta = i\sin n\theta \text{ என்றாகிறது.}$$

வகை 3 :

n நேர் அல்லது எதிர் விகிதமுறும் பின்னம் என்போம்.

அதாவது,

$$n = \frac{p}{q}\ (q > 0)$$

$$(\cos n\theta + i\sin n\theta)^q = \cos nq\theta + i\sin nq\theta \quad [\text{வகை } (1)]$$

$$= \cos p\theta + i\sin p\theta \left(\because n = \frac{p}{q}\right)$$

அதாவது,

$$(\cos n\theta + i \sin n\theta)^q = (\cos\theta + i \sin\theta)^p$$

[வகை (1) அல்லது (2)]

இரண்டு பக்கங்களிலும் q-ன் வர்க்க மூலம் எடுத்தால்,

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^{p/q} = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$$

இவ்வாறு மேற்கண்ட தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 :—எழுதுவதற்கு எளிதாக சில சமயங்களில்,

$\cos\theta + i \sin\theta$ என்பதை $\text{cis}\,\theta$ என்றும்

$\cos\theta - i \sin\theta$ என்பதை $\text{cis}\,(-\theta)$ என்றும்

எழுதுவர்.

குறிப்பு 2 : $\text{cis}\,\alpha \,.\, \text{cis}\,\beta = \text{cis}\,(\alpha + \beta)$

3. $\text{cis}\,\theta .\, \text{cis}\,(-\theta) - \text{cis}\,(0) = 1$

4. $\dfrac{1}{\text{cis}\,\theta} = \text{cis}\,(-\theta)$; $\dfrac{1}{\text{cis}\,(-\theta)} = \text{cis}\,\theta$

5. $\text{cis}\,\theta + \text{cis}\,(-\theta) = 2\cos\theta$

6. $\text{cis}\,\theta - \text{cis}\,(-\theta) = 2i \sin\theta$

$$[\text{cis}\,\theta + \text{cis}\,(-\theta) = [\cos\theta + i \sin\theta) + (\cos\theta - i \sin\theta) = 2\cos\theta$$

இதேபோல் $\text{cis}\,\theta - \text{cis}\,(-\theta) = (\cos\theta + i \sin\theta) - (\cos - i \sin\theta)$
$= 2i \sin\theta]$

§ 6. $(\cos\theta + i \sin\theta)^{1/q}$-ன் வேறுபட்ட பல மதிப்புகள்

[(All the distinct values of $\cos\theta + i \sin\theta)^{1/q}$]

$(\cos\theta + i \sin\theta)^{\frac{1}{q}}$ என்பதற்கு q வேறுபட்ட மதிப்புகள் தாம் உண்டென்று இப்போது நிறுவுவோம். அந்த q மதிப்புகளில் ஒன்றுதான் $\cos q\theta + i \sin q\theta$ என்று தீமாய்வர் தேற்றத்தில் கண்டோம்.

k என்பது, 0 உள்பட, ஏதாவது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழு எண் என்றால் (k is an integer, + *ve or* − *ve* including zero) $\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)$ என்பது தெளிவு. வலப்பக்கத்துக் கோவை (expression), இடப்பக்கத்துக் கோவையின் பொது உருவம் (general form) எனலாம்.

எனவே, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/q}$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{q} + \frac{2k\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{q} + \frac{2k\pi}{q}\right)$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\theta}{q} + \frac{2k\pi}{q}\right) \text{ (சுருக்கமாக)}$$

இங்கே

k-க்கு, − 1 −, 2. − 3, ... 0, 1, 2, 3, ... ஆகிய எந்த எண்ணையும் பிரதியிடலாம்.

ஆகவே, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/q}$-க்கு எண்ணிலடங்காத அளவு (infinite number of) மதிப்புகள் இருப்பதாக தோன்றுகிறது. ஆனால் அவைகளில் q மதிப்புகளே வேறுபட்டவை (distinct) மற்றவைகள் அவைகளின் திருப்பங்கள்தான் (repetitions) என்று காண்போம்.

$k = 0$ என்றால், முதல் மதிப்பு $= \text{cis}\left(\frac{q}{\theta}\right)$

$k = 1$ என்றால், 2-ம் மதிப்பு $= \text{cis}\left(\frac{q}{\theta} + \frac{2\pi}{q}\right)$

$k = 2$ என்றால், 3-ம் மதிப்பு $= \text{cis}\left(\frac{q}{\theta} + \frac{4\pi}{q}\right)$

... ...

... ...

$k = q - 1$ என்றால், q-ம் மதிப்பு

$$= \text{cis}\left[\frac{q}{\theta} + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right]$$

மேலே உள்ள q மதிப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்டவை என எளிதில் உணரலாம். k-க்கு, 0, 1, 2, ... $(q-1)$ தவிர

மற்ற எண்ணைப் பிரதியிட்டாலும், மேலே உள்ள q மதிப்புகளில் ஒன்றைத்தான் கிடைக்குமே தவிர புதியது ஒன்றும் கிடைக்காது. ஏனென்றால், $k = q + \gamma$ என்றால்,

$$(q + \gamma + 1)\text{-ம் மதிப்பு} = \text{cis}\left[\frac{\theta}{q} + \frac{2(q+\gamma)\pi}{q}\right]$$

$$= \text{cis}\left[\frac{\theta}{q} + 2\pi + \frac{2\gamma\pi}{q}\right]$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\theta}{q} + \frac{2\gamma\pi}{q}\right)$$

$$= (\gamma + 1)\text{-ம் மதிப்பு}$$

எனவே, $(\text{cis}\,\theta)^{1/q}$-க்கு q மாறுபட்ட மதிப்புகள்தான் உண்டென்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு: $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ என்பதற்கும் q-மாறுபட்ட மதிப்புகள் தான் உண்டு ஏனென்றால், $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ $(\cos p\theta + i\sin p\theta)^{1/q}$ ..

மாதிரிக் கணக்கு 1:

சுருக்குக:

$$\frac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^7 (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{12} (\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^{-6}}$$

கொடுத்த கோவையைச் சுருக்கமாக எழுதினால்,

$$= \frac{[\text{cis}(-2\theta)]^7 (\text{cis}\,3\theta)^{-5}}{(\text{cis}\,4\theta)^{12} [\text{cis}(-5\theta)]^{-6}}$$

$$= \frac{[\text{cis}(-14\theta)][\text{cis}(-15\theta)]}{(\text{cis}\,48\theta)(\text{cis}\,30\theta)}$$

$$= \frac{\text{cis}(-29\theta)}{\text{cis}(-78\theta)}$$

$$= \text{cis}(-29\theta)\,\text{cis}(-78\theta)$$

$$= \text{cis}(-107\theta)$$

$$= \cos 107\theta - i\sin 107\theta$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$(-1+i\sqrt{3})^{3n}+(-1-i\sqrt{3})^{3n}=2^{3n+1}$$

(B. E. '71)

என்று காண்பிக்கவும்.

$$-1+i\sqrt{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ என்றால்}$$

$$r\cos\theta=-1\,;\; r\sin\theta=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad r=+\sqrt{1+3}=+2$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{2}\,;\;\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore\quad -1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad (-1+i\sqrt{3})^{3n}=\left(2\text{ cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{3n}=2^{3n}\text{ cis }2\pi n$$

$$=2^{3n}\ (\because\ \text{cis }2n\pi=1)$$

அதேபோல் $(-1-i\sqrt{3})^{3n}=\left[2\text{ cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{3n}$

$$=2^{3n}\text{ cis}(-2n\pi)$$

$$=2^{3n}\cdot 1$$

எனவே, $(-1+i\sqrt{3})^{3n}+(-1-i\sqrt{3})^{3n}$

$$=2^{3n}+2^{3n}=2^{3n+1}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$2\cos\theta=x+\frac{1}{x}\,;\;2\cos\phi=y+\frac{1}{y}\,;\;2\cos\psi=z+\frac{1}{z}$$

என்றால்,

$$\frac{x^l z^n}{y^m}+\frac{y^m}{x^l z^n}=2\cos(l\theta-m\phi+n\psi)$$

என்று காண்பிக்கவும்.

$$2\cos\theta=x+\frac{1}{x}\qquad\therefore\quad x^2-2x\cos\theta+1=0$$

அதாவது,

$$x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

அல்லது $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$

இங்கே $x = \cos\theta + \sin\theta = \text{cis}\,\theta$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம். ($x = \text{cis}(-\theta)$ என்று எடுத்துக் கொண்டும் செய்யலாம். அதே விடைதான் கிடைக்கும்.)

அதேபோல் $y = \text{cis}\,\phi$, $z = \text{cis}\,\psi$

$$\therefore \frac{x^l z^n}{y^m} = \frac{\text{cis}\,l\theta \cdot \text{cis}\,n\psi}{\text{cis}\,m\phi}$$

$$= \text{cis}\,(l\theta - n\psi)\,\text{cis}\,(-m\phi)$$

$$= \text{cis}\,(l\theta - m\phi + n\psi)$$

$= \text{cis}\,(\alpha)$ என்போம்

$$(\alpha = l\theta - m\phi + n\psi)$$

$$\frac{y^m}{x^l z^n} = \frac{1}{\frac{x^l z^n}{y^m}} = \frac{1}{\text{cis}\,(\alpha)}$$

$$= \text{cis}\,(-\alpha)$$

$$\therefore \frac{x^l z^n}{y^m} + \frac{y^m}{x^l z^n} = \text{cis}\,(\alpha) + \text{cis}\,(-\alpha)$$

$$= 2\cos\alpha$$

$$= 2\cos(l\theta - m\phi + n\psi)$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$x_r = \cos\left(\frac{\pi}{2^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\right)$ என்றால்,

$x_1 \cdot x_2 \cdots \cdots$ மு. வரை $= -1$ என்று காண்பிக்கவும்

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots = \text{cis}\,\frac{\pi}{2} \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{2^2} \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{2^3}$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \cdots \infty\right)$$

$$= \text{cis}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \text{cis}\,\pi = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$= -1$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n$ என்றால்

(அ) $p_0 - p_2 + p_4 - \dots = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$

(ஆ) $p_1 - p_3 + p_5 - \dots = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$

என்று காண்பிக்கவும்.

$$(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots p_n x^n \quad \dots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)-ல் $x = i$ எனப் பிரதியிடுக.

$$(1+i)^n = p_0 + p_1 i - p_2 - p_3 i + p_4 + p_5 i - p_6 + \dots \\ \dots + p_n i^n \quad (2)$$

இதில் i-க்குப் பதிலாக $-i$ மாற்றினால்

$$(1-i)^n = p_0 - p_1 i - p_2 + p_3 i + p_4 - p_5 i - p_6 + \dots \\ \dots + p_n(-i)^n \quad (3)$$

இப்போது, $1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்றால்,

$$r = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^n = 2^{n/2}\,\text{cis}\,\frac{n\pi}{4}$$

இதேபோல்,

$$(1-i)^n = 2^{n/2}\,\text{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

சமன்பாடுகள் (2) ஐயும், (3) ஐயும் கூட்டினால்,

$$2[p_0 - p_2 + p_4 - \dots] = (1+i)^n + (1-i)^n$$

$$= 2^{n/2}\left[\text{cis}\,\frac{n\pi}{4} + \text{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{n/2} \cdot 2\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore\ p_0 - p_2 + p_4 - \dots = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

மேலும், (2)-லிருந்து (3) ஐக் கழித்தால்,

$$2i[p_1 - p_3 + p_5 - \dots] = 2^{n/2}\left[\text{cis}\,\frac{n\pi}{4} - \text{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{n/2} \cdot 2i\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore\ p_1 - p_3 + p_5 - \dots = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$(1 - i\sqrt{3})^{1/4}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க.

(B. E. '70, B. Tech. '69)

$1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்போம்.

$$r\cos\theta = 1;\quad r\sin\theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore\ r = +\sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2};\quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta = -\frac{\pi}{3}$$

எனவே $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

இதைப் பொதுக் கோவையாக எழுதினால்

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\therefore\quad (1 - i\sqrt{3})^{1/4} = 2^{1/4} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)$$

எனவே $(1 - i\sqrt{3})^{1/4}$-ன் நான்கு மதிப்புகள்

$$= 2^{1/4} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right),\quad k = 0, 1, 2, 3$$

மாதிரிக் கணக்கு 7.

$1^{1/3}$-ன் மூன்று மதிப்புகளையும் காண்க. அவைகளை 1, ω_1, ω_2 எனப் பெயரிட்டால், $\omega_1^{2} = \omega_2$ என்றும், $\omega_2^{2}\ \omega_1$ என்றும் நிறுவுக. மேற்படி மூன்று மூலங்களை $1, \omega, \omega^2$ என்று வைத்துக் கொண்டால்,

(அ) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(ஆ) $\dfrac{1}{1 + 2\omega} - \dfrac{1}{1 + \omega} + \dfrac{1}{2 + \omega} = 0$

என்றும் நிறுவுக.

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \operatorname{cis} 0$$

எனவே அதைப் பொதுக் கோவையாக எழுதினால்

$$1 = \operatorname{cis} 2k\pi$$

$$\therefore\quad 1^{1/3} = (\operatorname{cis} 2k\pi)^{1/3} = \operatorname{cis}\frac{2k\pi}{3}$$

$k = 0$ என்றால், $1^{1/3} = \operatorname{cis} 0 = 1$

$k = 1$ என்றால், $1^{1/3} = \operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_1$$

$k = 2$ என்றால், $1^{1/3} = \operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_2$$

இப்போது, $\omega_1^2 = \left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} = \omega_2$

மேலும் $\omega_2^2 = \left(\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}\right)^2 = \text{cis}\,\frac{8\pi}{3}$

$$= \text{cis}\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} = \omega_1$$

எனவே மேற்படி மூன்று மூலங்களை $1\ \omega, \omega^2$ என வைத்துக் கொள்ளலாம்.

இங்கே $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{அல்லது cis}\,\frac{4\pi}{3}\right)$ என்போம்.

(அ) $1 + \omega + \omega^2 = 1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} + \left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^2$

$$= 1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} + \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

(ஆ) கொடுத்த இடப்பக்கக் கோவை

$$= \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$= \frac{(1+\omega)(2+\omega) - (1+2\omega)(2+\omega) + (1+2\omega)(1+\omega)}{(1+2\omega)(1+\omega)(2+\omega)}$$

$$= \frac{(2+3\omega+2^2) - (2+5\omega+2\omega^2) + (1+3\omega+2\omega^2)}{(1+2\omega)(1+\omega)(2+\omega)}$$

$$= \frac{1+\omega+\omega^2}{(1+2\omega)(1+\omega)(2+\omega)}$$

$$= 0.$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$$

என்றால்,

(அ) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ஆ) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

என்று நிறுவுக.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$(1) + i \times (2)$-லிருந்து

$$\text{cis}\,\alpha + \text{cis}\,\beta + \text{cis}\,\gamma = 0$$

அல்லது

$$x + y + z = 0 \ (x = \text{cis}\,\alpha \text{ முதலியன})$$

எனவே

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

அதாவது,

$$(\text{cis}\,\alpha)^3 + (\text{cis}\,\beta)^3 + (\text{cis}\,\gamma)^3 = 3\,\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\beta\cdot\text{cis}\,\gamma$$

அதாவது,

$$\cos 3\alpha + \text{cis}\,3\beta + \text{cis}\,3\gamma = 3\,\text{cis}(\alpha+\beta+\gamma)$$

அதாவது,

$$(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + (\cos 3\beta + i\sin 3\beta) + (\cos 3\gamma + i\sin 3\gamma) = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma) + 3i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

இரு பக்கங்களிலும் மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன் செய்தால்,

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

கீழ்வரும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$$x^9 + x^5 = x^4 + 1 \qquad \text{(B. Tech. '72)}$$

$$x^9 + x^5 - (x^4 + 1) = 0$$

$$x^5 (x^4 + 1) - (x^4 + 1) = 0$$

$$(x^5 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$\therefore \quad x^5 - 1 = 0$ அல்லது $x^4 + 1 = 0.$

வகை (1) $x^5 - 1 = 0$

அதாவது $x^5 = 1 = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)$

$$\therefore \quad x = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

வகை (2) $x^4 + 1 = 0$

அதாவது $x^4 = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$

$$\therefore \quad x = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right] + i \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right] \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

ஆக 9 மூலங்களும் (1), (2) சமன்பாடுகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரிக் கணக்கு 10.

α, β என்பவை $t^2 - 2t + 2 = 0$-வின் மூலங்கள், மற்றும் $\cot\phi = x + 1$ என்றால்,

$$\frac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{\sin^n \phi}{\sin^n \phi}$$ என்று நிறுவுக.

$$\alpha, \beta = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$\therefore \quad \alpha = 1 + i, \; \beta = 1 - i, \; \alpha - \beta = 2i$

$$x + \alpha = \cot\phi - 1 + 1 + i = \cot\phi + i = \frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\sin\phi}$$

$$x + \beta = \cot\phi - 1 + 1 - i = \cot\phi - i = \frac{\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\phi}$$

$$\therefore \quad (x + \alpha)^n = \frac{(\text{cis}\,\varphi)^n}{(\sin\varphi)^n} = \frac{\text{cis}\, n\varphi}{\sin^n\varphi}$$

அதேபோல் $(x + \beta)^n = \dfrac{\text{cis}\,(-n\varphi)}{\sin^n\varphi}$

$$\therefore \quad \frac{(x + \alpha)^n - (x + \beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{\text{cis}\, n\varphi - \text{cis}\,(-n\varphi)}{2i\sin^n\phi}$$

$$= \frac{2i\sin n\phi}{2i\sin^n\phi}$$

$$= \frac{\sin n\phi}{\sin^n\phi}$$

மாதிரிக் கணக்கு 11.

$$(a_1 + i\,b_1)(a_2 + i\,b_2)\ldots(a_n - i\,b_n) = A + iB$$

என்றால்,

(அ) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\ldots(a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

(ஆ) $\tan^{-1}\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{b_2}{a_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

என்று காண்பிக்க.

$$a_1 + i\,b_1 = \gamma_1 \text{ cis } \theta_1$$

$$a_2 + i\,b_2 = \gamma_2 \text{ cis } \theta_2$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$a_n + i\,b_n = \gamma_n \text{ cis } \theta_n$$

$A + iB = R \text{ cis } \varphi$ என்போம்.

கொடுத்த சமன்பாட்டை பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$(\gamma_1 \operatorname{cis} \theta_1)(\gamma_2 \operatorname{cis} \theta_2) \dots (\gamma_n \operatorname{cis} \theta_n) = R \operatorname{cis} \varphi$$

அதாவது, $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = R \operatorname{cis} \varphi$

அதாவது, $r_1 r_2 r_3 \dots r_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$
$+ i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] = R (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

மெய்பகுதி, கற்டனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்,

$$r_1 \cdot r_2 \dots r_n \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = R \cos \varphi \qquad (1)$$

$$r_1 \cdot r_2 \dots r_n \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = R \sin \varphi \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளின் வர்க்கம் எடுத்து, கூட்டுக.

$$r_1^2 \cdot r_2^2 \dots r_n^2 = R^2$$

அதாவது $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

(2)-வது சமன்பாட்டை (1)-வது சமன்பாட்டால் வகுக்க,

$$\tan (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = \tan \varphi$$

$$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \varphi$$

அதாவது

$$\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

மாதிரிக் கணக்கு 12.

$$x = \cos \alpha + i \sin \alpha, \; y = \cos \beta + i \sin \beta$$

$z = \cos \gamma + i \sin \gamma$, மற்றும் $x + y + z = 0$

என்றால் $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ என்று காட்டுக. (B E. '65)

$x + y + z = 0$ என்றால்

$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + i (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) = 0$
என்று ஆகும்.

மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0 \qquad (2)$$

(2)-வது சமன்பாட்டை i-ஆல் பெருக்கி (1)-லிருந்து, கழித்தால்,

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha) + (\cos\beta - i\sin\beta) + (\cos\gamma - i\sin\gamma) = 0$$

ஆனால், $\cos\alpha - i\sin\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \dfrac{1}{x}$,

இதேபோல், $\cos\beta - i\sin\beta = \dfrac{1}{y}$, $\cos\gamma - i\sin\gamma = \dfrac{1}{z}$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

பயிற்சி 1.

1. கீழ் வரும் கலப்பெண்களை மட்டு-வீச்ச உருவத்தில் மாற்றி அமைக்கவும்.

(1) 1 (2) -1 (3) i

(4) $-i$ (5) $2-3i$

(6) $1+\sqrt{2}+i$ (7) $2-\sqrt{3}+i$

(8) $(2-i)(1+i)$ (9) $(2-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

(10) $\dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$ (11) $\dfrac{1+i3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2i}$ (B.E. '70)

(12) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

2. கீழ் வரும் கோவைகளைச் சுருக்கி எழுதுக.

(அ) $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^3 (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^2 (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-3}}$

(ஆ) $\dfrac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^4}{(\sin\beta + i\cos\beta)^5}$

(இ) $\left(\dfrac{1+\sin\pi/8 + i\cos\pi/8}{1+\sin\pi/8 - i\cos\pi/8}\right)^8$ (B. Tech. '70)

(ஈ) $\dfrac{1-\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}$

(உ) $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^9}{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^9 (\cos\theta - i\sin\theta)^8}$, $\theta = 18^\circ$

3. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n$

$$= 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2} \quad \text{(B. Tech. '68)}$$

(ஆ) $$\left(\frac{1 + \sin\phi + i\cos\phi}{1 + \sin\phi + i\cos\phi}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right)$$

(இ) $[(\cos\theta + \cos\varphi) + i(\sin\theta + \sin\varphi)]^n$

$+ [(\cos\theta + \cos\varphi) - i(\sin\theta + \sin\phi)]^n$

$$= 2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta + n\varphi}{2}\right)$$

(உ) $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$

(B. Tech. '69)

(ஊ) $(a + ib)^{m/n} (a + ib)^{m/n}$

$$= 2(a^2 + b^2)^{\frac{m}{2n}}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

4. கீழ்க்கண்ட கலப்பெண்களின் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க.

(1) $(-1)^{\frac{1}{10}}$ (2) $(1 - i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$

(B. E. '70, (B. Tech. '69)

(3) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{2}{5}}$ (4) $(1 + i)^{\frac{1}{5}}$ (B. E. '65, '68)

(5) $\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ + \cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^{\frac{1}{3}}$

(6) $(1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8$

(7) $\left(\frac{1 - i}{2 + 3i}\right)^{\frac{1}{4}}$ (B. E. '61)

5. $1^{\frac{1}{5}}$-ன் 5 மதிப்புகளையும் காண்க. மேலும்

$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{5}{4}$ என்று காட்டுக. (B. E. '72)

6. $2\cos\theta = x+\frac{1}{x}$, $2\cos\varphi = y+\frac{1}{y}$ என்றால்,

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\frac{x^m}{y^n}+\frac{y^n}{x^m}=2\cos(m\theta-n\varphi)$ (B. E. '72)

(ஆ) $\frac{x^n}{y^m}-\frac{y^m}{x^n}=2i\sin(n\theta-m\phi)$

(இ) $x^m y^n+\frac{1}{x^m y^n}=2\cos(m\theta+n\varphi)$ (B. Tech. '69)

7. $x=\text{cis}\,\alpha$, $y=\text{cis}\,\beta$, $z=\text{cis}\,\gamma$, $u=\text{cis}\,\delta$ என்றால்,

(i) $(x+y)(z+u)=4\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\times$

$$\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)\right]$$

(ii) $xy+zu=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)\times$

$$\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)\right]$$

என்று காண்பிக்கவும்.

8. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ என்றால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$ (B. Tech. '72)

(ஆ) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$

(இ) $\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)=0$

(ஈ) $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0$

(உ) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$

(ஊ) $\Sigma \cos(2\alpha + \beta + \gamma) = \Sigma \sin(2\alpha + \beta + \gamma) = 0$

[குறிப்பு : மா. க. (12) ஐப் பயன்படுத்துக.)

9. $a = \text{cis } 2\alpha$, $b = \text{cis } 2\beta$, $c = \text{cis } 2r$, $d = \text{cis } 2\delta$

என்றால், பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\sqrt{abc} + \dfrac{1}{\sqrt{abc}} = 2\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ஆ) $\sqrt{\dfrac{ab}{cd}} + \sqrt{\dfrac{cd}{ab}} = 2\cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$

(இ) $\dfrac{a^p b^q}{c^r d^s} - \dfrac{c^r d^s}{a^p b^q} = 2i \sin(p\alpha + q\beta - r\gamma - s\delta)$

(ஈ) $2\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$

(உ) $\cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{2}\left(ab + \dfrac{1}{ab}\right)$

10. $x = \cos\theta + i\sin\theta$ என்றால்,

$$\frac{x^{2n} + 1}{x^{2n-1} + x} = \frac{\cos n\theta}{\cos(n-1)\theta}$$ (B.E. '64, S.V. 'ty)

11. ஆரம் 1 உள்ள ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் AB என்போம். வட்ட விற்கள் AP , $P_1 P_2$, P_2, P_3, ... எல்லாம் சமமாயிருக்கும்படி P , P_2, P_3, ... என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. வட்டவில்

$BP_1 = x + \dfrac{1}{x}$ என்றால்,

$BP_2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $BP_3 = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, ...

என்று காண்பிக்கவும்.

12. $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ என்றால்
$x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1 = 0$ என்று நிறுவுக.

13. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களைச் காண்க.

(அ) $x^7 - 1 = 0$

(ஆ) $x^6 + x^3 + 1 = 0$ (B. E. '71)

(இ) $x^8 - x^4 + 1 = 0$

(ஈ) $x^3 = \sqrt{3} + i$ (B. E. '62)

(உ) $x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0$

(ஊ) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

(எ) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

(ஏ) $(x + 1)^n = (x - 1)^n$

(ஐ) $(x + 1)^n = x^n$

14. $\alpha = \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{7}$ என்றால் $x^2 + x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha + \alpha^3 + \alpha^4$. மற்றும் $\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ என்று நிறுவுக.

15. $1^{\frac{1}{3}}$-ன் மூலங்களில் 1 அல்லாத மூலம் ஒன்றை ω என்றால், மற்றும் z_1, z_2, z_3 மூன்று கலப்பெண்கள் என்றால்,

$$(z_1 + \omega z_2 + \omega^3 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1$$

என்று நிறுவுக.

16. $1^{\frac{1}{n}}$-ன் n மூலங்கள் பெருக்கு விருத்தி பெருக்குத் தொடர்களாக (Geometric progression) உள்ளன என்று நிறுவுக.

17. $1^{\frac{1}{7}}$-ன் 7 மூலங்களையும் காண்க. அவைகளை $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^6$ எனப் பெயரிடுக.

$n = 7$-ன் மடங்கு ஆனால், $1^n + \omega^n + (\omega^2)^n + \ldots + (\omega^6)^n = 7$ என்றும்

$n \neq 7$-ன் மடங்கு என்றால், $1^n + \omega^n + (\omega^2)^n + \ldots + (\omega^6)^n = 0$ ன்றும் காண்பிக்கவும்.

விடைகள்

1. (1) $\cos 0 + i \sin 0$ (2) $\cos \pi + i \sin \pi$

(3) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

(4) $\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8}\right)$

(5) $\sqrt{13} \text{ cis } (-56° 19')$

(6) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ cis } \frac{\pi}{8}$

(7) $2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cis } 75°$ (8) $\sqrt{5} \text{ cis } (73° 26')$

(9) $\sqrt{28} \text{ cis } (19° 6{\cdot}5')$ (10) $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{12}\right)$

(11) $2 \text{ cis } \frac{\pi}{6}$ (12) $2 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

2. (அ) 1 (ஆ) $\text{cis } \left(4\alpha + 5\beta - 5\frac{\pi}{2}\right)$

(இ) -1 (ஈ) $i \tan \theta$ (உ) 1

4. (1) $\text{cis } \left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots 9$

(2) $2^{\frac{1}{4}} \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$

(3) $2^{\frac{2}{5}} \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{15} + \frac{4k\pi}{15}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

(4) $2^{\frac{2}{5}} \text{ cis } \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

(5) $\left(2 \cos \frac{\pi}{40}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{72} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$

(6) $2^9 \cos \frac{2\pi}{3}$

13. (அ) $x = \text{cis } \left(\frac{2k\pi}{7}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(ஆ) $x = \text{cis } \left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}\right)$, $k = 0, 1, 2$

(இ) $x = \text{cis}\left(\frac{R\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2, 3$

(ஈ) $x = 2^{\frac{1}{3}}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$

(உ) $x = \text{cis}\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi,\ k = 0, 1, 2$

மற்றும் $x = \text{cis}\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi,\ k = 0, 1, 2, 3$

(ஊ) $x = \text{cis}\ \frac{2k\pi}{5},\ \ k = 1, 2, 3, 4$

(எ) $x = \text{cis}\frac{(2k+1)\pi}{5},\ \ k = 0, 1, 3, 4$

(ஏ) $x = -\ i \cot \frac{k\pi}{n},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$

(ஐ) $x = -\frac{1}{2}\left\{ 1 + i \cot \frac{\pi k}{n}\right\},$

$k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$

§ 7. ஆர்கண்ட் வரைபடம் மூலம் கலப்பெண்களை ஆராய்தல் (Geometrical study of Complex numbers)

ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் $a + ib$ என்ற கலப்பு எண்ணை எவ்வாறு குறிப்பது என்று பார்த்தோம். அதாவது, $a + ib$ என்ற கலப்பெண், ஆயத் தொலை கணிதத்தில் (co-ordinate geometry) $(a\ b)$ என்ற கார்டீசியன் ஆயத் தொலைகள் cartesian co-ordinates) அல்லது $(r. \theta)$ என்ற துருவ ஆயத் தொலைகள் (polar, co-ordinates) உள்ள ஒரு புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும்

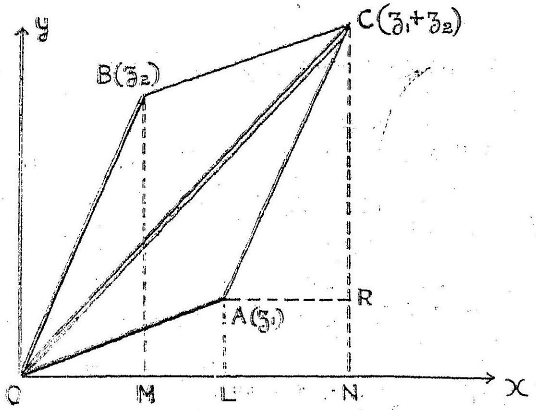
$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}\ ;\ r \cos \theta = a.\ r \sin \theta = b$$

என்று கண்டோம்.

இனி இரண்டு கலப்பெண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவற்றை ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் எவ்வாறு குறிக்கப்படும் என்று காண்போம்.

§ 8. இரண்டு கலப்பு எண்களின் கூட்டல் (Addition of two complex numbers)

$z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ என்ற இரு கலப்பெண்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 4.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

என்று நாம் அறிவோம்.

z_1, z_2 என்ற கலப்பு எண்களை A, B என்ற புள்ளிகள் குறிக்கட்டும். $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளியைக் காண்பது நமது நோக்கம்.

வரைவுமுறை (construction) : $OABC$ என்ற இணைகரத்தைப் (parallelogram) பூர்த்தி செய்க. பின்பு, C என்ற புள்ளி $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கும் (படம் 4).

நிறுவல் : மெய்யச்சு OX-க்குச் செங்குத்தாக, AL, BM, CN என்ற நேர்கோடுகளையும், CN-க்குச் செங்குத்தாக AR என்ற நேர்கோட்டையும் வரைக.

பின், $OL = a$, $OM = c$, $LA = b$, $MB = d$

வரைவு முறையால், $\triangle ARC \equiv \triangle OMB$

$$\therefore \quad ON = OL + LM = OL + AR$$
$$= OL + OM$$
$$= a + c$$

மேலும், $NC = NR + RC = LA + MB$
$$= b + d$$

$\therefore$ C என்ற புள்ளி $(a + c) + i(b + d)$ அதாவது $z_1 z_2$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு: மேலே கண்ட இரு கலப்பு எண்களைக் கூட்டும் முறை, இரண்டு வெக்டர்களைக் கூட்டும் முறையாகவே உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

அதாவது, $z_1 = \vec{OA}$, $z_2 = \vec{OB}$ என்றால்,

$$z_1 + z_2 = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$

எனவே எந்த ஒரு கலப்பு எண்ணும் ஒரு நிலைவெக்டரைக் (position vector) குறிக்கும்.

அதாவது, (x, y) என்பது P என்ற புள்ளியின் கார்டீசியன் ஆயத்தொலைகள், மற்றும் (γ, θ) அதன் துருவ ஆயத் தொலைகள் என்றால், கலப்பு எண் $x + iy = \vec{OP}$ நிலைவெக்டர். இந்த வெக்டரின் நீளம் $= \gamma = +\sqrt{x^2+y^2}$ மேற்படி வெக்டரின் திசை (direction), X-அச்சிலிருந்து $\theta°$ கோணத்தில் திரும்பியிருக்கும் $\left(\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$.

§ 9. இரண்டு கலப்பு எண்களின் கழித்தல் (Subtraction of two complex numbers)

முன்போலவே $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ என்ற இரு கலப்பு எண்களை A, B என்ற புள்ளிகளால் குறிப்போம்.

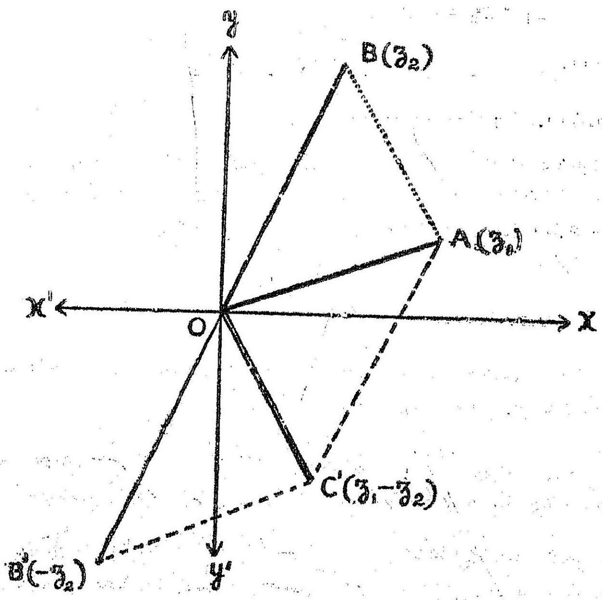
$$z_1 = \vec{OA}, \quad z_2 = \vec{OB}$$

என்று § 8-ல் கண்டோம்.

$$\therefore \quad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} \quad (\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB'})$$



படம் 5.

எனவே, BO என்ற நேர்க்கோட்டை நீட்டி, $BO = OB'$ என்று எடுத்துக் கொள்க. பின்பு, $OAB'C'$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

பிறகு $\overrightarrow{OC^1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB^1} = z_1 - z_2$ என்பது தெளிவு. எனவே C^1 என்ற புள்ளி $z_1 - z_2$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கிறது (படம் 5).

§ 10. இரண்டு கலப்பு எண்களின் பெருக்கல் (Product of two complex numbers)

$$z_1 = a + ib = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_2)$$
$$z_2 = c + id = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

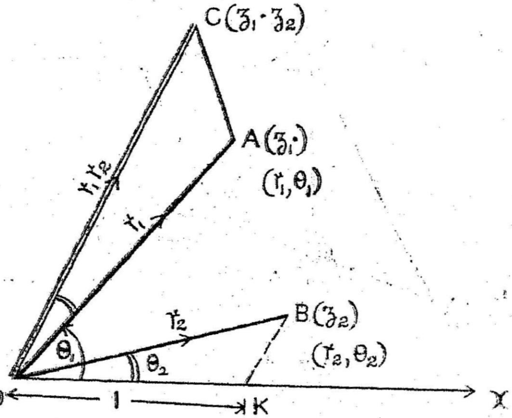
என்ற இரு கலப்பு எண்களை A, B என்ற புள்ளிகளால் குறிப்போம். இங்கே துருவ ஆயத் தொலைகளைப் பயன்படுத்துவது நன்மை பயக்கும்.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \text{ cis } \theta_1) \cdot (r_2 \text{ cis } \theta_2)$$

அதாவது, $z_1 \cdot z_2 = r_1, r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$

இதிலிருந்து, இரண்டு கலப்பு எண்களின்

பெருக்கலின் மட்டு = தனித்தனி மட்டுகளின் பெருக்கல், மற்றும், பெருக்கலின் வீச்சம் = தனித்தனி வீச்சங்களின் கூட்டல் என்றும் தெரியவருகிறது.



படம் 6.

வரைவு முறை :—X அச்சில், K என்ற புள்ளியை $OK = 1$ அலகு இருக்கும்படி எடுத்துக்கொள்க. BK-ஐச் சேர்க்கவும். OA-க்கும், OB-க்கும் இடையில் இல்லாதபடி $\triangle OKB$-க்கு வடிவொத்ததாக $\triangle OAC$ வரைக.

பின்பு C என்ற புள்ளிதான் $z_1 \cdot z_2$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கும் (படம் 6).

நிறுவல் :

வரைவு முறைப்படி, $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OK}$

அதாவது, $\frac{OC}{r_2} = \frac{r_1}{1}$ $\therefore \; OC = r_1 r_2$

மேலும், $\hat{XOC} = \hat{XOA} + \hat{AOC}$

$= \theta_1 + \hat{XOB}$ (வரைவு முறைப்படி)

$= \theta_1 + \theta_2$

எனவே, $\vec{OC} = z_1 z_2$

$\therefore$ $z_1 z_2$ என்ற கலப்பு எண் C என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது.

§ 11. இரண்டு கலப்பு எண்களின் வகுத்தல் (Division of two complex numbers)

$z_1 = a + ib = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

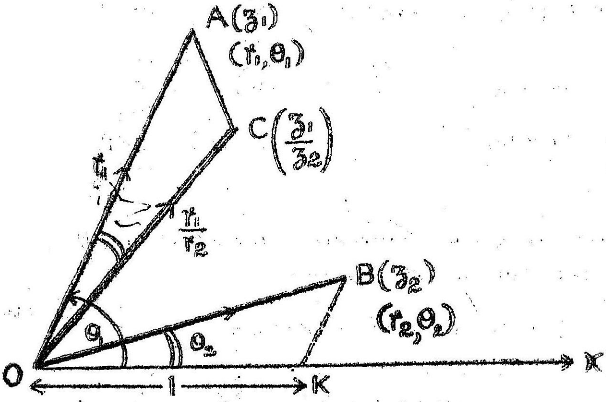
$z_2 = c + id = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

என்ற இரு கலப்பு எண்களை A, B என்ற புள்ளிகள் குறிக்கட்டும்.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \text{ cis } \theta_1}{r_2 \text{ cis } \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$$

அதாவது, வகுத்தலின்மட்டு = தனித்தனி மட்டுகளின் வகுத்தல் என்றும். வகுத்தலின் வீச்சும் = தனித்தனி வீச்சுங்களின் கழித்தல் என்றும் தெரிய வருகிறது.

வரைவு முறை : X-அச்சில் K என்ற புள்ளியை $OK = 1$ அலகு இருக்கும்படி தெரிந்தெடுக்கவும். OA, OB இவைகளுக்கு இடையில் வருமாறு, $\triangle\, OKB$-க்கு வடிவொத்ததாக $\triangle\, OCA$ வரைக. பின்பு C என்ற புள்ளிதான் $\frac{z_1}{z_2}$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கும் (படம் 7).



படம் 7.

நிறுவல் : வரை முறைப்படி, $\frac{OC}{OK} = \frac{OA}{OB}$

அதாவது, $\frac{OC}{1} = \frac{r_1}{r_2}$ $\therefore$ $OC = \frac{r_1}{r_2}$

மேலும், $X\hat{O}C = X\hat{O}A - C\hat{O}A$

$= XOA - X\hat{O}B$

$= \theta_1 - \theta_2$

எனவே, C என்ற புள்ளி $\frac{z_1}{z_2}$ -ஐக் குறிக்கும்.

§ 12. துணைமுடிவுகள் :

1. படம் (4)-ல், $|\vec{OC}| < |\vec{OA}| + |\vec{AC}|$

அதாவது, $|\vec{OC}| < |\vec{OA}| + |\vec{OB}|$

அதாவது, $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

அதாவது, இரு கலப்பு எண்களைக் கூட்டியதன் மட்டு, தனித்தனி மட்டுக்களைக் கூட்டியதைவிடக் குறைவு.

2. படம் (5)-ல், $|\vec{OC}| + |\vec{OB^1}| > |\vec{B^1C^1}|$

அல்லது $|\vec{OC}| + |\vec{OB}| > |\vec{OA}|$

அதாவது, $|z_1 - z_2| + |z_2| > |z_1|$

$\therefore \quad |z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$

அதாவது, இரு கலப்பு எண்களின் கழித்தலின் மட்டு, தனித்தனி மட்டுக்களின் கழித்தலைவிட அதிகம்.

3. படம் (5)-ல், வெக்டர் விதிப்படி

$\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ அல்லது $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = z_1 - z_2$

அதாவது, $A(z_1)$, $B(z_2)$ என்றால்

$\vec{BA} = z_1 - z_2$ மற்றும் $\vec{AB} = z_2 - z_1$

§ 13. ஒரு கலப்பு எண்ணின் n-ன் வர்க்க மூலங்களை ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் காட்டுதல் (Representation of n-th roots of a complex number in Argand diagram)

கொடுத்துள்ள கலப்பு எண் $a + ib$ என்போம். இதைப் பொதுவான மட்டு—வீச்சம் உருவத்தில் மாற்றுக

பின்பு $a + ib = r\,[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\theta = \frac{a}{+\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\theta = \frac{b}{+\sqrt{a^2 + b^2}}$$

எனவே

$$(a + ib)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots (n - 1)$.

மேல் கண்ட n வர்க்கமூலங்களை $z_1\ z_2 \ldots z_n$ என்று குறித்தால்,

$$z_1 = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]$$

அல்லது சுருக்கமாக எழுதினால், $\left(\varphi = \frac{2\pi}{n} \text{ என்க.}\right)$

$$z_1 = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

$$z_2 = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = \gamma^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \varphi\right)$$

$$z_3 = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) = \gamma^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + 2\phi\right)$$

$$z_4 = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{6\pi}{n}\right) = \gamma^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + 3\phi\right)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$z_n = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left[\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)\,2\pi}{n}\right]$$

$$= \gamma^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left[\frac{\theta}{n} + (n-1)\,\phi\right]$$

இந்த n வர்க்க மூலங்களை $p_1\, p_2 \ldots p_n$ என்ற n புள்ளிகளால் குறித்தால், அப் புள்ளிகளின் துருவ ஆயத்தொலைகள், முறையே

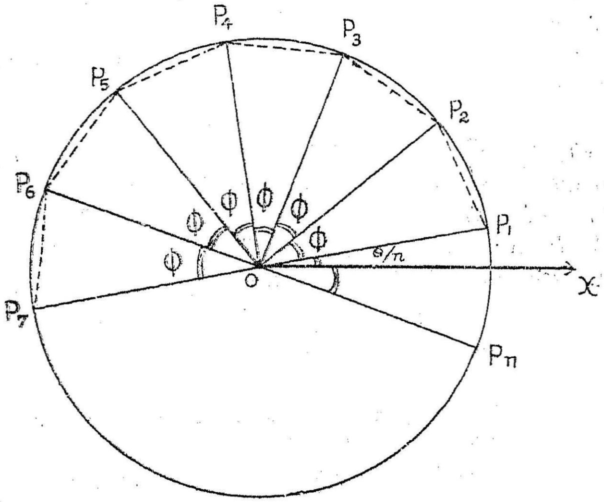
$$\left(r^{\frac{1}{n}},\ \frac{\theta}{n}\right),\ \left(r^{\frac{1}{n}},\ \frac{\theta}{n} + \varphi\right),\ \left(\gamma^{\frac{1}{n}},\ \frac{\theta}{n} + 2\phi\right), \ldots$$

$$\ldots \left(r^{\frac{1}{n}},\ \frac{\theta}{n} + \overline{n-1}\,\phi\right)$$

ஆகும் (படம் 8).

இந்த துருவ ஆயத் தொலைகளில் ஆரவெக்டர்களின் நீளங்கள் எல்லாம் $\gamma^{\frac{1}{n}}$ என்ற ஒரே அளவினதாக இருப்பதைக்

கவனிக்கவும். ஆகவே அவைகள் O-ஐ மையமாகவும், $r^{\frac{1}{n}}$-ஐ ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்தின்மேல் அமைந்துள்ளன என்று தெளிவாகிறது.



படம் 8.

மேலும்

$$X\hat{O}P_1 = \frac{\theta}{n}, \; X\hat{O}P_2 = \frac{\theta}{n} + \varphi, \ldots XOP_r = \frac{\theta}{n} + (r-1)\varphi, \ldots$$

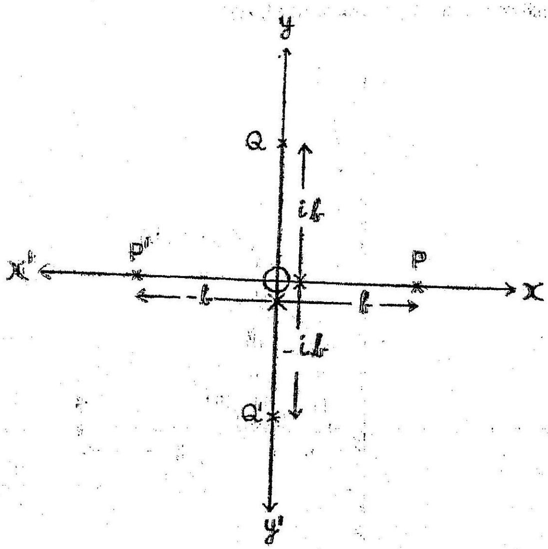
அதாவது $P_1\hat{O}P_2 = P_2\hat{O}P_3 = \ldots = P_n\hat{O}P_1 = \varphi = \frac{2\pi}{n}$

எனவே $P_1 \; P_2 \; P_3 \ldots P_n$ ஆகிய n புள்ளிகளையும் அடுத்தடுத்து சேர்த்தால், n பக்கமுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணம் (regular polygon) கிடைக்கும். மேற்படி பல்கோணத்தின் உச்சிகள் (vertices) தான், $(a+ib)^{\frac{1}{n}}$-ன் n வர்க்க மூலங்கள்.

§ 14. கற்பனை எண் i-க்கு ஒரு விளக்கம் (An interpretation for the imaginary number i)

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் கலப்பு எண்களைக் குறிக்கும் விதத்தை § 2-ல் கண்டோம். எந்த ஆதாரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, தூய கற்பனை எண்கள் (pure imaginary numbers), Y-அச்சில் குறிக்கப்படுகின்றன? $i = \sqrt{-1}$ என்பதை, தூய கற்பனை எண்களின் அலகு என்று கூறுவதைத் தவிர வேறு ஏதாவது பொருள்கொள்ள முடியுமா? இந்தக் கேள்விகளுக்குப் பதில் கூற முயலுவோம்.

b என்ற மெய் எண் X-அச்சில், O-விலிருந்து வலப்பக்கத்தில் b அலகு தூரத்தில் உள்ள P என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது. என்றும், $-b$ என்ற மெய் எண் X-அச்சில் O-விலிருந்து இடப் பக்கத்தில் b அலகு தூரத்தில் உள்ள P' என்ற புள்ளியால் குறிக்கப் படுகிறது என்றும் பார்த்தோம் (படம் 9).



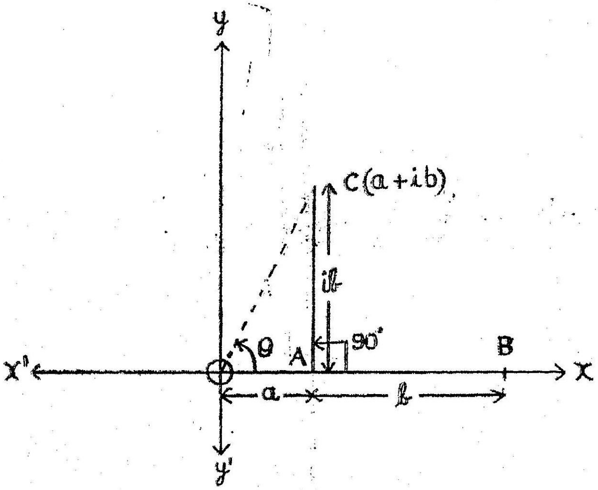
படம் 9.

$-b = -1 \times b$ என்பதால், -1 என்ற பெருக்கும் செயலியின்

(multiplicative operator) பணி $\overrightarrow{OP}$ என்ற வெக்டரை இரு செங்கோணம் வரை இடஞ்சுழியாக சுழற்றுவதாகும் (to rotate

the vector $\overrightarrow{OP}$ through 2 right angles in the counter clockwise sense), என்று நன்கு தெளிவாகுறது.

இப்போது, $i \times i = -1$ என்பதால், i-யை ஒரு பெருக்கும் செயலி என்று வைத்துக்கொண்டால், அதனுடைய இருமுறைச் செய்கை (operation twice)யும், (-1)-ன் செய்கையும் சமமாகவேண்டும். எனவே i என்ற செயலியின் பணி $\overrightarrow{PO}$ என்ற வெக்டரை ஒரு செங்கோணம் வரை இடஞ்சுழியாக சுழற்றுவதாகும். ஆகையால் $ib\ (\equiv i \times b)$ என்ற எண் Y-அச்சில், O-விலிருந்து மேல்பக்கமாக b அலகு தூரத்தில் உள்ள Q என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படவேண்டிய அவசியமாகிறது. இதேபோல் $-ib = i \times i \times i \times b$ என்பதால், $-ib$ என்ற எண், ($\overrightarrow{OP}$ என்ற வெக்டர் 3 செங்கோணம் வரை இடஞ்சுழியாக சுழற்றுப்பட்டு) Y-அச்சில், O-விலிருந்து கீழ்ப்பக்கமாக b அலகு தூரத்தில் உள்ள Q' என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 10.

இப்போது $a + ib$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கவேண்டிய முறையை விளக்குவது மிக எளிது. ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும் OX, OY என்ற இரு நேர் கோடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அவைகளை முறையே X-அச்சு,

Y-அச்சு என்று கூறுகிறோம். X-அச்சில், $OA = a$ என்று இருக்கும்படி A என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. தொடர்ந்து அதே X-அச்சில் $AB = b$ என்று இருக்கும்படி B என்ற புள்ளியையும் எடுத்துக்கொள்க (படம் 10).

பின்பு ib என்றால், $\vec{AB}$ என்ற வெக்டரை ஒரு செங்கோணம் வரை இடஞ்சுழியாக சுழற்றினால் $\vec{AC}$ என்ற வெக்டர் கிடைக்கும். இதனால் C என்ற புள்ளிதான் $a + ib$ என்ற கலப்பு எண்ணைக் குறிக்கிறது.

மேலும் $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

மற்றும் $\theta = A\hat{O}C = \tan^{-1} \dfrac{b}{a}$

எனவே, OC என்பது $a + ib$-ன் மட்டு என்றும், $A\hat{O}C$ அதன் வீச்சம் என்றும் தெளிவாகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1:

$| z_1 + z_2 |$ $| z_1 + z_2 |$ என்றால், z_1, z_2

இவைகளின் வீச்சங்களின் வித்தியாசம் $\dfrac{\pi}{2}$ என்று நிறுவுக.

$z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id$ என்போம்.

$$z_1 + z_2 = a + c + i(b + d);\ z_1 - z_2 = a - c + i(b - d)$$

$$\therefore \quad | z_1 + z_2 |^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2;$$
$$| z_1 - z_2 |^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

எடுகோள்படி (by hypothesis) $| z_1 + z_2 |^2 = | z_1 - z_2 |^2$

$$\therefore \quad (a + c)^2 + (b + d)^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

அதாவது $2ac + 2bd = -2ac - 2bd$

அல்லது $ac + bd = 0$ **(1)**

ஆனால், z-ன் வீச்சம் $-$ z_2-ன் வீச்சம்

$$= \tan^{-1}\frac{b}{a} - \tan^{-1}\frac{d}{c}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{bc - ad}{ac + bd}\right\}$$

$$= \tan^{-1}(\infty)$$ [(1)-ஐப் பயன்படுத்தினால்]

$$= \frac{\pi}{2}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

A, B என்ற புள்ளிகள் α, β என்ற மாறிலி (constant) கலப்பு எண்களையும், P என்ற புள்ளி $Z = x + iy$ என்ற மாறி கலப்பு எண்ணையும் (variable complex number) குறிக்கின்றன.

(i) $|z - \alpha| = |\beta|$

(ii) $|z - \alpha| = |z - \beta|$ என்றால்,

P-ன் நியமப் பாதைகளைக் காண்க.

(i) $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ என்போம்.

$\therefore\ z - \alpha = x + iy - (a + ib) = (x - a) + i(y - b)$

$\therefore\ |z - \alpha|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$

மேலும் $|\beta|^2 = c^2 + d^2$

$|z - \alpha| = |\beta|$ (எடுகோள்)

எனவே $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 + d^2$

ஆகையால் P-யின் நியமப்பாதை, (a, b)-ஐ மையமாகவும், $\sqrt{c^2 + d^2}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆகும்.

(ii) $z - \beta = (x + iy) - (c + id) = (x - c) + i(y - d)$

$\therefore\ |z - \beta|^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2$

எடுகோள்படி, $|z - \alpha| = |z - \beta|$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2$$

அதாவது $-2ax + a^2 - 2by + b^2 = -2cx + c^2 - 2dy + d^2$

அதாவது $2(c-a)x + 2(d-b)y + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 0$

ஆகையால் P-யின் நியமப் பாதை ஒரு நேர்கோடு.

மாதிரிக் கணக்கு 3 :

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் $-2-5i$, $1+4i$, $3+10i$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

$-2-5i$, $1+4i$, $3+10i$ என்ற கலப்பெண்களை முறையே A, B, C என்ற புள்ளிகளால் குறிக்கப்படட்டும்.

§ 12-ல் உள்ள துணை முடிவு (3)-ஐப் பயன்படுத்தினல்,

$$\vec{AB} = (1+4i) - (-2-5i) = 3 + 9i$$

$$\vec{BC} = (3+10i) - (1+4i) = 2 + bi$$

$$\vec{AC} = (3+10i) - (-2-5i) = 5 + 15i$$

$$\therefore \quad \vec{AB} + \vec{BC} = (3+9i) + (2+6i) = 5 + 15i$$

எனவே $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

ஆகையால், A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$z = x + iy$ என்பது ஒரு மாறி கலப்பு எண் K ஒரு மாறிலி மெய்யெண். $u + iv = \dfrac{K}{z}$ என்க. u-ம், v-ம் தனித்தனியாக மாறிலி மெய்யெண்கள் என்ருல், z-ன் நியமப் பாதைகள் வட்டங்கள் என்றும், அவைகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என்றும் நிறுவுக.

$K = a + ib$ என்போம்.

எனவே $u + iv = \dfrac{K}{z}$ என்பதை

$$u + iv = \frac{a + ib}{x + iy} = \frac{(a + ib)(x - iy)}{(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{(ax + by) + i(bx - ay)}{x^2 + y^2}$$

என்று எழுதலாம்.

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்,

$$u = \frac{ax + by}{x^2 - y^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$v = \frac{bx - ay}{x^3 + y^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$u = \alpha$ (ஒரு மெய் மாறிலி) என்றால், (1)-வது சமன்பாடு

$$\frac{ax + by}{x^2 + y^2} = \alpha \text{ என்று ஆகும்.}$$

அதாவது $\alpha(x^2 + y^2) - ax - by = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$

இது ஒரு வட்டம் என்பது தெளிவு

இதேபோல், $v = \beta$ (ஒரு மெய் மாறிலி) ஆனால்,

(2)-வது சமன்பாடு,

$$\beta(x^2 + y^2) - bx + ay = 0 \qquad \ldots \qquad (4)$$

என்று ஆகும். இதுவும் ஒரு வட்டம் என்பது தெளிவு.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0 \end{array}\right\}$$

என்ற இருவட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்வதற்கான நிபந்தனை

$$2gg' + 2ff' = c + c'$$

ஆகும்.

[அதிகாரம் (3), § 46-ஐப் பார்க்கவும்]

இங்கே, (3), (4) ஆகியவற்றில்,

$$2g = -\frac{a}{\alpha}, \quad 2f = -\frac{b}{\alpha}, \quad c = 0$$

$$2g' = -\frac{b}{\beta}, \quad 2f' = \frac{+a}{\beta}, \quad c' = 0$$

எனவே, $2gg' + 2ff'$

$$= 2\left(\frac{-a}{2\alpha}\right)\left(\frac{-b}{2\beta}\right) + 2\left(\frac{-b}{2\alpha}\right)\left(\frac{a}{2\beta}\right)$$

$$= \frac{ab}{2\alpha\beta} - \frac{ab}{2\alpha\beta}$$

$$= 0 = c + c'$$

ஆகையால் வட்டங்கள் (3)-ம், (4)-ம் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாய் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

பயிற்சி 2.

1. கீழ்க்கண்ட கலப்பு எண்களை ஆர்கன்ட் வரை படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $3 + 2i$ (ii) $\frac{1}{3 - 2i}$ (iii) $-2 - 5i$ (iv) $3 + 10i$

(v) $1 + 4i$ (vi) $\frac{1 - i}{1 + i}$ (vii) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2$

2. மேலே உள்ள கணக்கு (1)-ல், (iiii), (iv), (v) ஆகியவற்றில் உள்ள கலப்பு எண்களை ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் குறித்து அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளனவா என்று கண்டறிக.

3. $3 + 7i$, $6 + 5i$, $15 - i$ என்ற கலப்பு எண்களை A, B, C என்ற புள்ளிகளால் குறித்தால், அவைகள் ஒரு நேர்க் கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்று ஆர்கன்ட் வரைபடம் வழியாகவும், கணக்கீடு முறையிலும் காண்பிக்கவும்.

4. ஆர்கன்ட் வரைபடம் வழியாக $(1 + i)$, $3 + 2i)$ என்ற கலப்பு எண்களின் பெருக்கலைக் காண்க. அதன் மட்டுவையும்

வீச்சத்தையும் அளந்து பார்த்து, கணக்கீடு முறையில் சரி பார்க்கவும். (B. E. '63)

5. ஆர்கன்ட் வரைபடம் வழியாக $2+3i$—ஐ $4-3i$— ஆல் வகுத்து வந்த கலப்பு எண்ணைக் காண்க. அதன் மட்டு மற்றும் வீச்சம் ஆகியவற்றை அளந்து பார்த்து கணக்கீடு மூலம் சரி பார்க்கவும். (B. E. '64)

6. $1+i$, $1-i$ என்ற கலப்பு எண்களையும், அவைகளின் பெருக்கலையும் ஆர்கன்ட் வரைபடத்திம் கண்டறிந்து $(1+i)(1-i)=2$ என்று சரி பார்க்கவும்.

7. $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, i என்ற மூன்று கலப்பு எண்களை ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் குறித்தால், அவைகள் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் ஆகும் என்று கணக்கீடு முறையில் நிறுவுக.

8. ஒரு சதுரத்தின் மையத்தையும், ஓர் உச்சியையும் $2-i$, $4+i$ என்ற கலப்பு எண்கள் குறித்தால், மற்ற உச்சிகளைக் குறிக்கும் கலப்பு எண்களைக் காண்க. [விடை : i, $-3i$, $4-3i$]

9. $5+2i$, $7+5i$, $4+7i$, $2+4i$ ஆகிய கலப்பு எண்கள். ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகள் ஆகும் என்று காண்பிக்கவும். படம் வரைந்து சரிபார்க்கவும்.

10. ஒரு சதுரத்தின் மையம் $2-i$ என்ற கலப்பு எண்ணால் குறிக்கப்படுகிறது. அதன் ஒரு உச்சி $i-1$ என்றால், மற்ற உச்சிகளைக் காண்க. (B. E. '70)

[விடை : (2, 0), (3, -1), (2, -2)]

11. $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடித்து அவைகளை ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் குறிக்கவும். அவைகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் என்றும் நிறுவுக. (B. E. '70)

12. $z=x+iy$ என்ற கலப்பு எண், ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். கீழ்வரும் சமன்பாடுகளில் P-யின் நியமப் பாதைகள் (loci) யாவை?

(அ) $|z + 5 - 7i| = 4$ (ஆ) $|2z + 4| = 2$

(இ) $|3z - 2| = |z + 2|$ (ஈ) $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = 7$

(உ) $(z - 5)$-ன் வீச்சம் $= \dfrac{\pi}{4}$ (ஊ) z-ன் வீச்சம் $= \dfrac{\pi}{2}$

[விடை : (அ) $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 2^2$ (வட்டம்)

(ஆ) $(x + 2)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ (வட்டம்)

(இ) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (வட்டம்)

(ஈ) $3(x^2 + y^2) + 6y + 4 = 0$ (வட்டம்)

(உ) $y = x - 5$ (நேர்கோடு)

(ஊ) $x = 0$ (Y-அச்சு)

13. z என்ற கலப்பு எண், $\left(\dfrac{z + 1}{z + 1}\right)$-ன் வீச்சம் எப்போதும் $\dfrac{\pi}{4}$ ஆகவே இருக்கும்படி மாறுகிறது. என்றால் $x^2 + y^2 - 2y = 1$ என்று நிறுவுக. (B. Tech. '68)

14. z என்ற கலப்பு எண் $x + iy$-ஐக் குறிக்கிறது. $\dfrac{z - i}{z - 1}$ எப்போதும் ஒரு தூய கற்பனை எண் ஆனால், z-ன் நியமப்பாதை $\dfrac{1}{2}(1 + i)$-ஐ மையமாகவும், $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் என்று நிறுவுக.

15. $\dfrac{z + 1}{z + i}$-ன் மெய்ப்பகுதி 1 என்றால், z-ன் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடு என்று காண்பிக்கவும்.

16. $z = x + iy$, $\omega = u + iv$ என்ற இரு கலப்பு எண்கள் $w = \dfrac{2 + z}{2 + z}$ என்ற தொடர்பு கொண்டுள்ளன. z என்ற கலப்பு எண், Y-அச்சில் நகரும்போது, ω என்ற கலப்பு எண் ஒரு வட்டத்தின்மேல் நகர்ந்துகொண்டிருக்கும் என்று நிறுவுக.

17. $(z+1)^5=(z-1)^5$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க. அவைகளை ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் குறித்தால், அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் என்று கணக்கீடுமூலம் காண்பிக்கவும்.

18. z_1, z_2 என்பவை இரண்டு கலப்பு எண்கள் என்றால், ஆர்கன்ட் வரைபடம் வழியாக அல்லது எந்த முறையிலாவது, கீழ்வரும் சமன்பாட்டை நிறுவுக.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z^2|^2$$

19. z_1, z_2, z_3 என்பவை மூன்று கலப்பு எண்கள் என்றால், $|z_1-z_2|^2>[|z_1-z_3|-|z_2-z_3|]^2$ மேற்கண்ட சமனின்மை (inequality) எப்போது சமன்பாடு ஆகும் என்று ஆராய்க.

20. ω என்பது $1^{\frac{1}{3}}$-ன் ஒரு கலப்புமூலம் (complex root) என்றால், $a+b$, $a+b\omega$, $a+b\omega^2$ என்ற கலப்பு எண்கள் ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளைக் குறிக்கும் என்று காண்பிக்கவும். இந்த முக்கோணத்தை அடக்கிய வட்டத்தின் மையம் a என்றும், அதன் ஆரம் b என்றும், காண்பிக்கவும்.

§ 15. $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\tan n\theta$ ஆகியவற்றை $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ இவைகளின் படியாக விரித்து எழுதல் (Expansion of $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, $\tan n\theta$ in terms of powers of $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$)

n ஒரு நேர் முழு எண் என்றால்,

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta &= (\cos\theta+i\sin\theta)^n \text{ (தீமாய்வர் தேற்றம்)}\\ &= (c+is)^n,\ (c=\cos\theta,\ s=\sin\theta)\\ &= c^n+nC_1\,c^{n-1}(is)+nC_2\,c^{n-2}(is)^2+\dots\\ &\qquad\text{(Binomial Theorem)}\\ &= (c^n-nC_2\,c^{n-2}s^2+nC_4\,c^{n-4}s^4-\dots)\\ &\quad+i(nC_1\,c^{n-1}s-nC_3\,c^{n-3}s^3\\ &\qquad+nC_5\,c^{n-5}s^5-\dots)\end{aligned}$$

இரு பக்கங்களிலும் உள்ள மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன் செய்தால்,

$$\cos n\theta = c^n - nC_2\, c^{n-2}s^2 + nC_4\, c^{n-4}s^4 - nC_6\, c^{n-6}s^6 + \dots \quad (1)$$

$$\sin n\theta = nC_1\, c^{n-1}s - nC_3\, c^{-3}s^3 + nC_5\, c^{n-5}s^5 - \dots \quad (2)$$

(2)-வது சமன்பாட்டை, (1)-வது சமன்பாட்டால் வகுக்கவும்

$$\tan n\theta = \frac{nC_1\, c^{n-1}\, s - nC_3\, c^{n-3}s^3 + nC_5\, c^{n-5}s^5 - \dots}{c^n - nC_2\, c^{n-2}s^2 + nC_4\, c^{n-4}s^4 - \dots}$$

இதில் தொகுதியையும் பகுதியையும் c^n-ஆல் வகுத்து,

$$\frac{s}{c} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = t$$ என்று எழுதினால்,

$$\tan n\theta = \frac{nC_1\, t - nC_3\, t^3 + nC_5\, t^5 - \dots}{1 - nC_2\, t^2 + nC_4\, t^4 - \dots} \quad \dots \quad (3)$$

மேலே கொடுத்துள்ள மூன்று விரித்தல்களை (expansions) நினைவில் வைத்துக்கொள்வது அவசியமாகும்.

§16. $\tan(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$-ன் விரித்தல் [(Expansion of tan $(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$]

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\alpha\,(1 + i\tan\alpha)$$
$$\cos\beta + i\sin\beta = \cos\beta\,(1 + i\tan\beta)$$
$$\cos\gamma + i\sin\gamma = \cos\gamma\,(1 + i\tan\gamma)$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

என்பதை நாம் அறிவோம். இவைகளை நிலைக்குத்தாக (vertical multiplication) பெருக்கல் செய்க. பிறகு $\text{cis}\,\alpha \cdot \text{cis}\,\beta = \text{cis}\,(\alpha+\beta)$ என்ற சமன்பாட்டின் தத்துவத்தைக் கையாள்க. இதனால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta + \gamma + \dots) &+ i\sin(\alpha + \beta + \gamma + \dots) \\
&= \cos\alpha \cdot \cos\beta \dots (1 + i\tan\alpha)(1 + i\tan\beta)\dots \\
&= \cos\alpha \cdot \cos\beta \dots [1 + i\,\Sigma\tan\alpha + i^2\,\Sigma\tan\alpha\tan\beta \\
&\qquad + i^3\,\Sigma\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma + \dots] \\
&= \cos\alpha \cdot \cos\beta \dots [1 + iS_1 - S_2 - iS_3 + S_4 + iS_5 \\
&\qquad - S_6 + \dots]
\end{aligned}$$

இந்த சமன்பாட்டில் மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்துக.

$(S_1 = \Sigma \tan\alpha,\ S_2 = \Sigma \tan\alpha \,.\, \tan\beta, \ldots)$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta \ldots [1 - S_2 + S_4 - S_6 \ldots +]$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta \ldots [S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots]$$

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots} \qquad (4)$$

குறிப்பு: சூத்திரம் (4)-லிலிருந்து, சூத்திரம் (3)-ஐக் காண்பது எளிது.

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ஆகிய n கோணங்களை எடுத்துக்கொண்டு, ஒவ்வொன்றுக்கும் θ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$S_1 = \Sigma \tan\theta = nC_1 \tan\theta = nC_1\, t \text{ ஆகும்}$$

இதேபோல், $S_2 = \Sigma \tan^2\theta = nC_2 \tan^2\theta = nC_2\, t^2$ ஆகும்

$$S_3 = nC_3\, t^3,\ S_4 = nC_4\, t^4, \ldots \ldots$$

இவைகளை (4)-ல் உரிய இடத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$\tan n\theta = \frac{nC_1\, t - nC_3\, t^3 + nC_5\, t^5 - \ldots}{1 - nC_2\, t^2 + nC_2\, t^4 - \ldots}$$

§ 17. $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ஆகியவற்றை α-வின் படிகளாக விரித்தல் (Expansion of $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ in powers of α) சூத்திரம் (1)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதுக.

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{\angle 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\angle 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots$$

இதில் $n\theta = \alpha$ என்று பிரதியிடுக.

பின்பு $$\text{ccs}\,\alpha = \cos^n\theta - \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta} - 1\right)}{\angle 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta} - 2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta} - 3\right)}{\angle 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta \ldots$$

$$= \cos^n\theta - \frac{\alpha(\alpha-\theta)}{\angle 2}\cos^{n-2}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)}{\angle 4}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4 - \ldots$$

இப்போது, $\theta \to 0$ என்றும் α ஒரு நிலையான கணியம் என்றும் வைத்துக்கொண்டால் $n\left(=\frac{\alpha}{\theta}\right)$ மிகப் பெரிய எண்ணை நெருங்கும். அதாவது $\theta \to 0$, $n \to \infty$, α நிலையான கணியம்

ஆகவே $\theta \to 0$, $n \to \infty$ என்றும், $\underset{\theta \to 0}{Lt}\ \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

மற்றும் $\underset{\theta \to 0}{Lt}\ \cos\theta = 1$ என்றும் உரிய இடத்தில் பிரதியிடுக.

$$\text{மேலும்,}\quad \underset{\gamma \to \infty}{Lt}\left[\underset{\theta \to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{\gamma}\right] = 1$$

$$\underset{\gamma \to \infty}{Lt}\left[\underset{\theta \to 0}{Lt}(\cos\theta)^{\gamma}\right] = 1$$

என்று தெளிவாகிறது.

எனவே, இவைகளை உரிய இடத்தில் பயன்படுத்தினால்,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{\angle 2} + \frac{\alpha^4}{\angle 4} - \frac{\alpha^6}{\angle 6} + \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

இப்போது சூத்திரம் (2)-ஐத் திருப்பி எழுதுக.

$$\sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{\angle 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$$

இதில் $n\theta = \alpha$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{\theta}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)}{\angle 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$$

$$= \alpha \cos^{n-1}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) - \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)}{\angle 3} \cos^{n-3}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 + \cdots$$

ஆகவே, $\theta \to 0$, $n \to \infty$ என்ருல், முன்பு விளக்கியபடி,

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{\angle 3} + \frac{\alpha^5}{\angle 5} - \frac{\alpha^7}{\angle 7} \quad \cdots \quad \cdots \qquad (6)$$

என்று கிடைக்கும்.

முக்கிய குறிப்பு :

(1) சூத்திரங்கள் (5), (6) அடைவதற்கு. θ ஆரையன் அலகில் இருந்தால் மாத்திரம் உண்மையாகும் $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ என்ற அடிப்படை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியிருக்கிருேம். எனவே, (5), (6) சூத்திரங்களும், அதிலிருந்து பெறக்கூடிய கீழே கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரம் (7)-ம் கொண்டுள்ள α என்ற கோணம் ஆரையன் அலகில்தான் இருக்கவேண்டியது அவசியமாகிறது.

(2) tan α-வின் விரித்தலைக் காண்பதற்குச் சூத்திரம் (3) ஐப் பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாக, சூத்திரங்கள் (5), (6) இவைகளைப் பயன்படுத்தினுல் விடை கிடைப்பது சிறிது எளிதாகும்.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{\angle 3} + \frac{\alpha^5}{\angle 5} - \frac{\alpha^7}{\angle 7} + \cdots}{1 - \frac{\alpha^2}{\angle 2} + \frac{\alpha^4}{\angle 4} - \frac{\alpha^6}{\angle 6} + \cdots}$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{\angle 3} + \frac{\alpha^5}{\angle 5} - \cdots \right. \left[1 - \left(\frac{\alpha^2}{\angle 2} - \frac{\alpha^4}{\angle 4} + \frac{\alpha^6}{\angle 6} - \cdots\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{\angle 3} + \frac{\alpha^5}{\angle 5} - \cdots\right) \left[1 + \left(\frac{\alpha^2}{\angle 2} - \frac{\alpha^4}{\angle 4} + \frac{\alpha^6}{\angle 6} - \cdots\right) + \left(\frac{\alpha^2}{\angle 2} - \frac{\alpha^4}{\angle 4} + \frac{\alpha^6}{\angle 6} - \cdots\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{\angle 3} + \frac{\alpha^5}{\angle 5} - \cdots\right)$$
$$\left[1 + \frac{\alpha^2}{\angle 2} - \frac{\alpha^4}{\angle 4} + \frac{\alpha^6}{\angle 6} - \cdots + \frac{\alpha^4}{(\angle 2)^2} - 2 \cdot \frac{\alpha^6}{\angle 2 \angle 4} + \cdots\right]$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \cdots\right)\left[1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} - \cdots\right]$$

$$= \alpha + \frac{\alpha^3}{2} + \frac{5\alpha^5}{24} - \cdots$$
$$- \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^5}{12} + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha^5}{120} + \cdots$$

அதாவது, $\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \cdots$ (7)

மேற்கண்ட சூத்திரம் (7)-ல், $\tan \alpha$-வின் விரித்தலை α-வின் 5 ஆவது படிவரை கொடுத்திருக்கிரேம். அதற்குமேல் காண்பது கடினம். மேலும், நடைமுறையில் அவசியம் இல்லை.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$\cos 8\theta = 1 - 32 \sin^2\theta + 160 \sin^4\theta - 256 \sin^6\theta + 128 \sin^8\theta$ என நிறுவுக.

$$\cos 8\theta = c^8 - 8\,C_2\, c^6 s^2 + 8\,C_4\, c^4 s^4 - 8\,C_6\, c^2 s^6 + s^8$$
$$(c = \cos\theta;\ s = \sin\theta)$$

$$= (1-s^2)^4 - 28\,(1-s^2)^3 s^2 + 70\,(1-s^2)^2 s^4 - 28\,(1-s^2)\,s^6 + s^8$$

$$= (1-4s^2+6s^4-4s^6+s^8) - 28\,(1-3s^2+3s^4-s^6)\,s^2 + 70\,(1-2s^2+s^4)\,s^4 - 28\,(s^6-s^8) + s^8$$

$$= 1 - 32s^2 + 160s^4 - 256\,s^6 + s^8$$

$$\therefore \quad \cos 8\theta = 1 - 32 \sin^2\theta + 160 \sin^4\theta - 250 \sin^6\theta + \sin^8\theta$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$x = 2\cos\theta$ என்றால்,

$2(1 + \cos 8\theta) = x^4 - 4x^2 + 2)^2$

என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '72)

$1 + \cos 8\theta = 2\cos^2 4\theta$ என்று நாம் அறிவோம்

இப்போது $\cos 4\theta = c^4 - 4C_2\, c^2 s^2 + s^4 \quad (c = \cos\theta\ s = \sin\theta)$

$$= c^4 - 6c^2(1 - c^2) + (1 - c^2)^2$$

$$= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4$$

$$= 8c^4 - 8c^2 + 1$$

$$= 8\left(\frac{x}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\left(c = \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 1$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 2)$$

$$\therefore\ 2(1 + \cos 8\theta) = 2 \cdot 2\cos^2 4\theta$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 2)\right]^2$$

$$= (x^4 - 4x^2 + 2)^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ என்றால்

$xy + yz + zx = 1$ என்று நிறுவுக.

$\tan^{-1}x = \alpha,\ \tan^{-1}y = \beta,\ \tan^{-1}z = \gamma$ என்க.

பின்பு $x = \tan\alpha,\ y = \tan\beta,\ z = \tan\gamma$

$$\therefore\ \tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\Sigma\tan\alpha - \tan\alpha\ \tan\beta\ .\ \tan\gamma}{1 - \Sigma\tan\alpha\ \tan\beta}$$

அதாவது $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \dfrac{(x + y + z) - xyz}{1 - (xy + yz + zx)}$ (1)

ஆனால், $\alpha + \beta + \gamma = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$

எனவே $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-லிருந்து,

$$1 - (xy + yz + zx) = 0$$

அதாவது, $xy + yz + zx = 1$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{19493}{19494}$ என்றால், தோராயமாக $\theta = 1°$ என்று காண்பிக்கவும்.

$\frac{19493}{19494}$ என்பது ஏறக்குறைய 1 ஆவதால். θ-வின் மதிப்பு மிகச் சிறியது என்பது தெளிவு.

எனவே, θ^5-ம் அதற்கு மேல்படிகளுள்ள உறுப்புகளை ஒதுக்கி விடலாம்.

$$\therefore \sin\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{\lfloor 3}$$ [$\simeq$ என்றால் "தோராயமாக சமம்"]

அதாவது, $\frac{\sin\theta}{\theta} \simeq 1 - \frac{\theta^2}{6}$

ஆனால், $\frac{\sin\theta}{\theta} \simeq \frac{19493}{19494} = 1 - \frac{1}{19494}$ (எடுகோள்)

$$\therefore 1 - \frac{\theta^2}{6} = 1 - \frac{1}{19494}$$

$$\therefore \theta^2 = \frac{6}{19494} = \frac{1}{3249}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{57} \text{ ஆரையன்}$$

$$= 1° \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

கீழ்வரும் கோவையின் (expression) எல்லை மதிப்பைக் காண்க.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^4}\left[\frac{\sin x}{x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 2\right]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{\angle 7} + \frac{x^9}{\angle 9} - \dots$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{\angle 7} + \frac{x^8}{\angle 9} - \dots$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{\angle 3} + \frac{x^5}{\angle 5} + \frac{x^7}{\angle 7} + \frac{x^9}{\angle 9} + \dots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2x}(e^x - e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{\angle 7} + \frac{x^8}{\angle 9} - \dots$$

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^4}\left[\frac{\sin x}{x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 2\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^4}\left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{\angle 7} + \frac{x^8}{\angle 9}\right) - \dots + \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{\angle 7} + \dots\right) - 2\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^4}\left[2 \cdot \frac{x^4}{120} + 2 \cdot \frac{x^8}{\angle 9} + \dots\right]$$

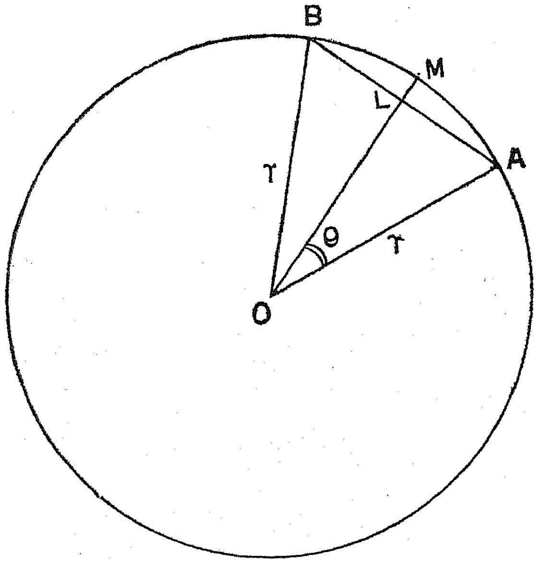
$$= \underset{x \to 0}{Lt} \left[\frac{1}{60} + \frac{2x^4}{\angle 9} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{60}$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

ஒரு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் a (length of a chord of a circle) என்க. அதன் அரைவில், கால்வில் ஆகியவற்றின் நாண்கள் முறையே b, c நீளங்கள் உடையதாய் இருந்தால், அந்த வட்ட வில்லின் நீளம் தோராயமாக $\dfrac{a - 40b + 256c}{45}$ என்று காண்பிக்கவும்.

கொடுத்த வட்டவில் $\overline{AB}$ என்றால், அதன் நாண் AB-யின் நீளம் a என்பது எடுகோள்.



படம் 11.

AB-யின் மையப்புள்ளி L என்றால் $OL \perp AB$

மேலும் $AL = \frac{1}{2} AB$ [படம் (11)]

வட்டத்தின் ஆரம் γ என்போம்.

மேலும் $A\hat{O}M = \theta$ ஆரையன் என்போம்.

எனவே, $a = 2AL = 2\, r \sin\theta$

இதேபோல், $b = 2r \sin\frac{\theta}{2}$

$$c = 2r \sin\frac{\theta}{4}$$

ஆனால் வட்டவில் $\overline{AB}$-யின் நீளம் $= 2\, r\, \theta$

இப்பொழுது $\frac{1}{45}[a-40b+256c] \simeq 2r\theta$

என்று காண்போம்.

$$\frac{1}{45}[a-40b+256c]$$

$$= \frac{1}{45}\left[2r\sin\theta - 40 \cdot 2r\sin\frac{\theta}{2} + 256 \cdot 2r\sin\frac{\theta}{4}\right]$$

$$= \frac{2r}{45}\Bigg[\left\{\theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \frac{\theta^7}{\angle 7} + \cdots\right\}$$

$$- 40\left\{\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{2^3\angle 3} + \frac{\theta^5}{2^5\angle 5} - \frac{\theta^5}{2^7\angle 5} + \cdots\right\}$$

$$+ 256\left\{\frac{\theta}{4} - \frac{\theta^3}{4^3\angle 3} + \frac{\theta^5}{4^5\angle 5} - \frac{\theta^5}{4^7\angle 7} + \cdots\right\}\Bigg]$$

$$= \frac{2r}{45}\Bigg[(1-20+64)\theta + \left(-\frac{1}{\angle 3} + \frac{5}{\angle 3} - \frac{4}{\angle 3}\right)\theta^3$$

$$+ \left(\frac{1}{\angle 5} - \frac{5}{4\angle 5} + \frac{1}{4\angle 5}\right)\theta^5$$

$$+ \left(-\frac{1}{\angle 7} + \frac{5}{16\angle 7} - \frac{1}{64\angle 7}\right)\theta^7 + \cdots\Bigg]$$

$$= \frac{2r}{45}\left[45\theta - \frac{45\theta^7}{64\angle 7} + \cdots\right]$$

$$= 2r\theta - \frac{r\theta^7}{32\angle 7} + \cdots$$

θ^7 மற்றும் அதிகபடியுள்ள உறுப்புகளை ஒதுக்கிவிட்டால்,

$$\frac{1}{45}[a-40b+256c] \simeq 2r\theta = \overline{AB}$$

குறிப்பு : உள் அமைகோணம் (included angle) $\frac{\pi}{2}$-க்கும் குறைவாக உள்ள வட்ட வில்களுக்கு மேற்படி கணக்கில் கொடுத்துள்ள தோராயமான சமன்பாட்டைச் சரியான சமன்பாடாகக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 3.

1. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $$\frac{\sin 6\theta}{\sin \theta} = 32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta$$

(ஆ) $$\frac{\sin 7\theta}{\sin \theta} = 7 - 56\sin^2\theta + 112\sin^4\theta - 64\sin^6\theta$$

(இ) $$\frac{\cos 5\theta}{\cos 5\theta} = 1 - 12\sin^2\theta + 16\sin^4\theta$$

(ஈ) $$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + \tan^4\theta}$$

2. $x = 2\cos\theta$ என்றால்,

$$\frac{1 + \cos 7\theta}{1 + \cos\theta} = (x^3 - x^2 - 2x + 1)^2$$ என்று நிறுவுக.
(B. E. '71)

3. $x + \frac{1}{x} = u$ என்றால்,

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = u^5 - 5u^3 + 5u$$ என்று காண்பிக்கவும்.
(B. E. 71)

4. $x^3 + px^2 + qx^2 + p = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ என்றால்,

$$\tan^{-1}\alpha, \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = n\pi\ (q \pm 1)$$

என்று காண்பிக்கவும்.

5. $\tan\theta_1, \tan\theta_2, \tan\theta_3, \tan\theta_4$ என்பவை,

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்றால்,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{r - p}{1 - q + s}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

6. $\tan\alpha = e\tan\beta$, $\tan\beta = e\tan\gamma$ மற்றும்

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ என்றால், $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ இவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

[விடை: $\tan\alpha = \sqrt{e(1+e+e^2},$

$$\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{1+e+e^2}$$

$$\tan\gamma = \frac{1}{e\sqrt{e}}\sqrt{1+e+e^2}]$$

7. கீழ்வரும் கோவைகளின் எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க.

(அ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$

(ஆ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

(இ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x - \sin x}{\sin x\,(1 - \cos x)}$

(ஈ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\sin^3 x}$

(உ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{x - \sin x}$

(ஊ) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} [\sec x - \tan x]$

(எ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^2 \sqrt{mn}\,x - \sin mx \sin nx}{(1 - \cos mx)(1 - \cos nx)}$

(ஏ) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} (\sin x)^{\tan x}$

(ஐ) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(\cos \dfrac{x}{n}\right)^n$

விடைகள்

(அ) -1 (ஆ) $\dfrac{1}{2}$ (இ) $\dfrac{1}{3}$ (ஈ) $-\dfrac{1}{6}$

(உ) 24 (ஊ) 0 (எ) $\dfrac{2(m-n)^2}{3mn}$ (ஏ) 1 (ஐ) 1

8. $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{863}{864}$ என்ருல் $\theta \simeq 4°47'$ என்று நிறுவுக.

9. $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{5054}{5046}$ என்ருல், $\theta \simeq 1°58'$ என்று நிறுவுக.

10. $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{2165}{2166}$ என்ருல், $\theta \simeq 3°\ 1'$ என்று நிறுவுக.

11. $\tan\theta = \dfrac{2524}{2523}$ என்ருல், $\theta \simeq \dfrac{1}{29}$ ஆரையன் என்று காண்பிக்கவும்.

12. $y = x - e\sin x$ (e மிகச்சிறிய மதிப்புடையது) என்ருல், e^2 மற்றும் அதிகபடிகளுடைய உறுப்புகளை ஒதுக்கிவிட்டால்,

$$\tan\frac{y}{2} = \tan\frac{x}{2}\left(1 - e + e^2\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}\left(1 + e + e^2\cos^2\frac{y}{2}\right)$$

என்று காண்பிக்கவும்.

13. $\sin(\omega - \theta) = \sin\omega\cos\alpha$ என்ற சமன்பாட்டில் θ மிகச் சிறிய மதிப்புடையது என்ருல்

$$\theta \simeq 2\tan\omega\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \tan^2\omega\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

என்று நிறுவுக.

14. x-ன் மதிப்பு எதுவாளுலும், $\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$-ன் மதிப்பு எப்போதும் $\dfrac{1}{3}$-க்கும் 3-க்கும் இடையில் இருக்கமுடியாது என்று நிறுவுக.

15. ஒரு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் $= a$. மேற்படி $\dfrac{2}{3}$ வில்லின் நாணின் நீளம் $= b$, மேற்படி $\dfrac{1}{3}$ வில்லின் நாணின் நீளம் $= c$ என்போம். அந்த முழு வில்லின் நீளம் தோராயமாக $\dfrac{1}{10}(a - 9b + 45c)$ என்று காண்பிக்கவும்.

16. ஒரு வட்டத்தில் n பக்கங்கள் உள்ள ஒரு நேர் பல் கோணம் (regular polygon) உள்ளே அடக்கப்பட்டுள்ளது (inscribed). p என்பது பல்கோணத்தின் சுற்றளவு ஆனால், வட்டத்தின் சுற்றளவு p-ஐவிட தோராயமாக $\frac{\pi^2 p}{6n^2}$ அதிகம் என்று நிறுவுக.

§ 18. $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ ஆகியவற்றை $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ முதலியவற்றால் விரித்து எழுதுதல் (Expansion of $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ in terms of cosines and sines of multiples of θ)

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta + i\sin\theta = x \text{ என்போம்} \\ \text{அதனால் } &\cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{x} \text{ ஆகும்} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{எனவே } \quad 2\cos\theta &= x + \frac{1}{x} \text{ என்றும்} \\ 2i\sin\theta &= x - \frac{1}{x} \text{ என்றும்} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

கிடைக்கும்

மேலும், தீமாய்வர் தேற்றத்தினால்

$$\left.\begin{aligned} \cos r\theta + i\sin r\theta &= x^r \\ \cos r\theta - i\sin r\theta &= \frac{1}{x^r} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} 2\cos r\theta &= x^r + \frac{1}{x^r} \\ 2i\sin r\theta &= x^r - \frac{1}{x^r} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (4)$$

$\cos^n\theta$-வை விரித்து எழுதும் முறையைக் காண்போம்.

$$(2\cos\theta)^n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

$$= x^n + nC_1\, x^{n-1} \cdot \frac{1}{x} + nC_2\, x^{n-2} \cdot \frac{1}{x_2} + \cdots$$

$$+ \cdots + nC_{n-2}\, x^2 \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + nC_{n-1}\, x \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}$$

$nC_{n-r} = nC_r$ என்பதை நினைவில் கொண்டால்,

$$\therefore\ 2^n \cos^n\theta = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + nC_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + nC_2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \dots$$

இப்போது சமன்பாடு (4)-ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$2^n \cos^n\theta = 2\cos n\theta + nC_1\,[2\cos(n-2)\theta] + nC_2\,[2\cos(n-4)\theta] + \dots$$

அதாவது $$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\,[\cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta + \dots] \qquad \text{(A)}$$

இப்போது $\sin^n\theta$-வின் விரித்தலைக் காண்போம்.

$$(2i\sin\theta)^n = \left(x - \frac{1}{x}\right)^n$$

$$= x^n - nC_1\,x^{n-1}\cdot\frac{1}{x} + nC_2\,x^{n-2}\cdot\frac{1}{x^2} - nC_3\,x^{n-3}\cdot\frac{1}{x^3} + \dots + (-1)^{n-2}\,nC_{n-2}\cdot x^2\,\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-1}\,nC_{n-1}\,x\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + (-1)^n\cdot\frac{1}{x^n}$$

வகை (1) n ஒரு ஒற்றை முழு எண் என்போம்.

$$(-1)^n = -1,\quad (-1)^{n-1} = +1,$$
$$(-1)^{n-2} = -1,\quad \dots,\quad i^n = \pm i$$

$$\therefore\ (2i\sin\theta)^n = \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) - nC_1\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}\right) + nC_2\left(x^{n-4} - \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \dots$$

$$= 2i\sin n\theta - nC_1\cdot 2i\sin(n-2)\theta + nC_2\cdot 2i\sin(n-4)\theta + \dots$$

$$\therefore \sin^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}\, i^{n-1}} [\sin n\theta - nC_1 \sin (n-2)\theta$$
$$+ nC_2 \sin (n-4)\theta + \ldots] \quad (B)$$

வகை (2) n ஒரு இரட்டை முழு எண் என்போம்.

$$(-1)^n = +1, \quad (-1)^{n-1} = -1.$$
$$(-1)^{n-2} = +1. \quad \therefore i^n = \pm 1$$

$$\therefore \quad (2i \sin\theta)^n = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - nC_1 \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$
$$+ nC_2 \left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots$$

$$= 2\cos n\theta - nC_1 \,.\, 2\cos (n-2)\theta$$
$$+ nC_2 \,.\, 2\cos (n-4)\theta - \ldots$$

$$\therefore \quad \sin^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}\, i^{n-1}} [\cos n\theta - nC_1 \cos (n-2)\theta$$
$$+ nC_2 \cos (n-4)\theta - \ldots] \quad (C)$$

குறிப்பு : மேலே நிறுவிய சூத்திரங்கள் (A), (B), (C) ஆகியவற்றை மனப்பாடம் செய்யவேண்டிய அவசியம் இல்லை. அவைகளை அடைய சமன்பாடுகள் (1) முதல் (4) வரை எழுதி கணக்குகளைச் செய்யவும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

நிறுவுக :

$$32 \sin^6\theta = 10 - 15 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta - \cos 6\theta$$

(B. Tech. '70)

$\cos\theta + i \sin\theta = x$ என்றால் $\cos\theta - i \sin\theta = \dfrac{1}{x}$ ஆகும்

$$\therefore \quad 2\cos x = x + \frac{1}{x} \;;\; 2i \sin\theta = x - \frac{1}{x}$$

மேலும் $2 \cos r\theta = x^r + \dfrac{1}{x^r}$; $2i \sin r\theta = x^r - \dfrac{1}{x^r}$

$$\therefore \quad (2i \sin\theta)^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^6 - 6C_1 x^5 \cdot \frac{1}{x} + 6C_2 x^4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$- 6C_3 x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + 6C_4 x^2 \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$- 6C_5 x \cdot \frac{1}{x^5} + 6C_6 \frac{1}{x^6}$$

$$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20$$

$$+ \frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^4} + \frac{15}{x^2}$$

$$= \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 20$$

$$\therefore \quad -2^6 \sin^6\theta = 2\cos 6\theta - 6\cdot 2\cos 4\theta + 15\cdot 2\cos 2\theta - 20$$

$$\therefore \quad 32 \sin^6\theta = [10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta]$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$\cos^3\theta \sin^4\theta = \frac{1}{64}[\cos 7\theta - \cos 5\theta$ $- 3\cos 3\theta + 3\cos\theta]$ என்று காண்பிக்கவும். (B. Tech. '71)

$\cos\theta + i\sin\theta = x$ என்றால், $\cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{x}$ ஆகும்

$$\therefore \quad 2\cos x = x + \frac{1}{x}; \quad 2i\sin\theta = x - \frac{1}{x}$$

மேலும் $2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r}$; $2i\sin r\theta = x^r - \frac{1}{x^r}$

$$\therefore \quad (2\cos\theta)^3 (2i\sin\theta)^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left[x^6 - 3 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 3x^2 \cdot \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}\right]$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left[x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right]$$

$$= x^7 - 3x^3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^5}$$

$$+ \frac{1}{x^7} - \frac{3}{x^3} + 3x - x^5$$

$$= \left(x^7 + \frac{1}{x^7}\right) - \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) - 3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$+ 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \quad 128 \cos^3\theta \sin^4\theta = 2\cos 7\theta - 2\cos 5\theta$$

$$- 3 \cdot 2\cos 3\theta + 3 \cdot 2 \cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos^3\theta \sin^4\theta = \frac{1}{64} [\cos 7\theta - \cos 5\theta$$

$$- 3\cos 3\theta + 3\cos\theta]$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$\cos^5\theta \sin^3\theta = \frac{1}{128} [6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta$

$- \sin 8\theta]$ என்று நிறுவுக. (B. E. '71)

$\cos\theta + i\sin\theta = x$ என்க. $\therefore \quad \cos - i\sin\theta = \frac{1}{x}$

எனவே $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ மற்றும் $2i\sin\theta = x - \frac{1}{x}$

மேலும் $2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r}$; $2i\sin r\theta = x^r - \frac{1}{x^r}$

$$\therefore \quad (2\cos\theta)^5 (2i\sin\theta)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^8 + 2x^6 + x^4 - 3x^4 - 6x^2 - 3$$

$$+ 3 + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^6} - \frac{1}{x^8}$$

$$= \left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right) + 2\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) - 2\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) - 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad -2^8 i \cos^5\theta \sin^3\theta = 2i \sin 8\theta + 2 \cdot 2i \sin 6\theta - 2 \cdot 2i \sin 4\theta - 6 \cdot 2i \sin 2\theta$$

$$\therefore \quad \cos^5\theta \sin^3\theta = \frac{1}{128}[6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta - \sin 8\theta]$$

பயிற்சி 4.

கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $64 \sin^7\theta = 35 \sin \theta - 21 \sin 3\theta + 7 \sin 5\theta - \sin 7\theta$ (B. Tech. '68)

2. $2^7 \cos^8\theta = 35 + 56 \cos 2\theta + 28 \cos 4\theta + 8 \cos 6\theta + \cos 8\theta$ (B. Tech. '69)

3. $\cos^5\theta = A \cos \theta + B \cos 3\theta + C \cos 5\theta$ என்றால்,
$\sin^5\theta = A \sin \theta - B \sin 3\theta + C \sin 5\theta$

4. $\cos^5\theta$-வை cosine-களின் θ-வின் மடங்குகளாக விரித்து எழுதுக. (express $\cos^5\theta$ in a series of cosines of multiples of θ) (B. E. '69)

விடை : $\frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta)$

5. $\sin^4\theta \cos^2\theta$-வை cosine-களின் θ-வின் மடங்குகளாக விரித்து எழுதுக. (B. E. '70)

[விடை : $\frac{1}{32}(\cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2)$]

6. $\sin^5\theta \ \cos^2\theta$-வை sine-களின் θ-வின் மடங்குகளாக எழுதுக. (B. E. '72)

[விடை : $\frac{1}{64}(\sin 7\theta - 3\sin 5\theta + \sin 3\theta + 5\sin\theta)$]

7. $\cos\theta \sin^5\theta$-வை sine-களின் θ-வின் மடங்குகளாக எழுதுக. (B. Tech. '72)

[விடை : $\frac{1}{32}(\sin 6\theta - 4\sin 4\theta + 5\sin 2\theta)$]

8. $2^9 \cos^4\theta \sin^3\theta = 6 - 2\cos 2\theta - 8\cos 4\theta + 3\cos 6\theta + 2\cos 8\theta - \cos 10\theta.$

9. $64(\cos^8\theta + \sin^8\theta) = \cos 8\theta + 28\cos 4\theta + 35$

10. $\cos^5\theta \sin^7\theta \ \frac{1}{2^{11}}[20\sin 2\theta - 5\sin 4\theta - 10\sin 6\theta + 4\sin 8\theta + 2\sin 10\theta - \sin 12\theta]$

§19. அதிபரவளைச் சார்புகள் (Hyperbolic functions)

நாம் இயற்கணிதத்தில் (Algebra)

$$e^x = 1 + \frac{x}{\angle 1} + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^3}{\angle 3} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{\angle 1} + \frac{x^2}{\angle 2} - \frac{x^3}{\angle 3} + \cdots$$

என்று பார்த்திருக்கிறோம்.

இவைகளை முதலில் கூட்டி, பிறகு அவைகளைக் கழித்துப் பார்த்தால் கிடைப்பது :

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^4}{\angle 4} + \frac{x^6}{\angle 6} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{\angle 3} + \frac{x^5}{\angle 5} + \frac{x^7}{\angle 7} + \cdots$$

மேல் கண்ட சார்புகளை முறையே அதிபரவளை கொஸைன், அதிபரவளை சைன் (hyperbolic cosine and sine) என்கிறோம். இவைகளைக் கீழ்க்காணும் முறையில் குறியீடு செய்கிறோம்.

$$\cos hx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^4}{\angle 4} + \cdots$$

$$\sin hx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{\angle 3} + \frac{x^5}{\angle 5} + \cdots$$

இதேபோல் $\tan hx = \dfrac{\sin hx}{\cos hx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cos hx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cosec} hx = \frac{1}{\sin hx} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

குறிப்பு : $\cos hx \geq 1$ என்பதும் $-\infty \leq \sin hx \leq \infty$ என்பதும் தெளிவு.

§ 19·1 ஆய்லர் சூத்திரம் (Euler formula)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta; \quad e^{-i\theta} \ (\cos\theta - i\sin\theta)$$

நிறுவல் :

$$e^x = 1 + \frac{x}{\angle 1} + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^3}{\angle 3} + \cdots$$

இதில் $x + i\theta$ எனப் பிரதியிடுக.

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{\angle 1} + \frac{i^2\theta^2}{\angle 2} + \frac{i^3\theta^3}{\angle 3} + \frac{i^4\theta^4}{\angle 4} + \frac{i^5\theta^5}{\angle 5}$$

$$+ \frac{i^6\theta^6}{\angle 6} + \frac{i^7\theta^7}{\angle 7} + \frac{i^8\theta^8}{\angle 8} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{\angle 2} + \frac{\theta^4}{\angle 4} + \frac{\theta^6}{\angle 6} + \frac{\theta^8}{\angle 8} - \cdots\right)$$

$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \frac{\theta^7}{\angle 7} + \cdots\right)$$

ஆனால், § 17-ல், $1 - \dfrac{\theta^2}{\angle 2} + \dfrac{\theta^4}{\angle 4} - = \cos\theta$ என்றும்,

$$\theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \dots = \sin\theta \text{ என்றும்}$$

அறிந்திருக்கிறோம்.

எனவே, $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \dots \qquad (A$$

இதேபோல், $$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \dots \qquad (B)$$

§ **19·2. கோண விகிதசார்புகளுக்கும் அதிபரவளைச் சார்புகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு** (Relation between Trigonemetric hyperbolic functions)

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\angle 2} + \frac{\theta^4}{\angle 4} \qquad \dots \qquad (1)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} \qquad \dots \qquad (2)$$

(1)-ல் $\theta = in$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\cos(ix) = 1 - \frac{i^2x^2}{\angle 2} + \frac{i^4x^4}{\angle 4} - \frac{i^6x^6}{\angle 6} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^4}{\angle 4} + \frac{x^6}{\angle 6} + \dots$$

$$= \cos hx$$

இதேபோல் (2)-ல், $\theta = ix$ என்று பிரதியிடுக

$$\sin(ix) = ix - \frac{i^3x^3}{\angle 3} + \frac{i^5x^5}{\angle 5} - \dots$$

$$= i\left(x + \frac{x^3}{\angle 3} + \frac{x^5}{\angle 5} + \dots\right)$$

$$= i\sin hx$$

எனவே $\boxed{\cos(ix) = \cos hx}$ ... (C)

$\boxed{\sin(ix) = i \sin hx}$ ... (D)

மேலும் (A)-யையும், (B)-யையும் கூட்டினால்

$$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos h\,(i\theta)$$

அதேபோல், (A)-யிலிருந்து (B)-யைக் கழித்தால்

$$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{i\theta} = 2\sin h\,(i\theta)$$

எனவே $\boxed{\cos h\,(i\theta) = \cos\theta}$ ... (E)

$\boxed{\sin h\,(i\theta) = i\sin\theta}$ ... (F)

சூத்திரங்கள் (C)-யும் (D)-யும் மிக முக்கியமானவை. அவை களைப் பயன்படுத்தி அதிபரவளைச் சார்புகளின் தொடர்புகளையும், பலவிதமான கணக்குகளையும் காண்பதும் செய்வதும் எளிதாகும்.

§19·3. சில முக்கியமான அதிபரவளைச் சார்புகளின் தொடர்புகள்

1. $\cos h^2\theta - \sin h^2\theta = 1$

2. $1 - \tan h^2\theta = \sec h^2\theta$

3. $\cot h^2\theta - 1 = \operatorname{cosec} h^2\theta$

4. $\sin h\,(x+y) = \sin hx \cos hy + \cos hx \sin hy$

5. $\sin h\,(x-y) = \sin hx \cos hy - \cos hx \sin hy$

6. $\cos h\,(x+y) = \cos hx \cos hy + \sin hx \sin hy$ (B. E. '72)

7. $\cos h\,(x-y) = \cos hx \cos hy - \sin hx \sin hy$

8. $\tan h\,(x+y) = \dfrac{\tan hx + \tan hy}{1 + \tan hx \cdot \tan hy}$ (B. E. '68)

9. $\tan h\,(x - y) = \dfrac{\tan hx - \tan hy}{1 + \tan hx \,.\, \tan hy}$

10. $\sin h\,(2x) \quad = 2 \sin hx \cos hx = \dfrac{2 \tan hx}{1 - \tan h^2 x}$

11. $\cos h\,(2x) \quad = \cos h^2 x + \sin h^2 x$

$$= 2 \cos h^2 x - 1$$

$$= 1 + 2 \sin h^2 x$$

$$= \frac{1 + \tan h^2 x}{1 - \tan h^2 x}$$

12. $\tan h\,(2x) \quad = \dfrac{2 \tan hx}{1 + \tan h^2 x}$

13. $\sin h\,3x \quad = 3 \sin hx + 4 \sin h^3 x$

14. $\cos h\,3x \quad = 4 \cos h^3 x - 3 \cos hx$

15. $\tan h\,3x \quad = \dfrac{3 \tan hx + \tan h^3 x}{1 + 3 \tan h^2 x}$

இப்படியே இன்னும் பல தொடர்புகளை எழுதலாம். ஒவ்வொரு கோண விகிதச் சார்புத் தொடர்புக்கும் அதிபரவளைச் சார்பு தொடர்பு ஒன்று உண்டு என்று அறியலாம். மேல்படித் தொடர்புகளை நிறுவும் முறை ஒரே தன்மையது. அதாவது, கோண விகித சார்புத் தொடர்பு எழுதிப் பின்பு சூத்திரங்கள் (C), (D) ஐப் பயன்படுத்தி, வேண்டிய அதிபரவளைச் சார்புத் தொடர்புகள் அடையலாம். முதல் மூன்று சமன்பாடுகளைக் கீழே நிறுவுவோம். மற்றைய சமன்பாடுகளை மாணவர்கள் தாங்களாகவே நிறுவிக் கொள்வார்களாக.

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

அதில் $\theta = ix$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\cos^2 (ix) + \sin^2 (ix) = 1$$

$$(\cos hx)^2 + i \sin hx)^2 = 1$$

அதாவது $\cos h^2 x - \sin h^2 x \quad = 1$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

இதில் $\theta = ix$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$1 + \tan^2 (ix) = \sec^2 (ix)$$

$$1 + (i \tan hx)^2 = (\sec hx)^2$$

அதாவது $1 - \tan h^2 x = \sec h^2 x$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

இதில் $\theta = ix$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$1 + \left[\frac{1}{\tan^2 (ix)}\right] = \left[\frac{1}{\sin (ix)}\right]^2$$

$$1 + \left(\frac{1}{i \tan hx}\right)^2 = \left(\frac{1}{i \sin hx}\right)^2$$

$$1 + (- \cot h^2 x) = - \operatorname{cosec} h^2 x$$

$$\therefore \quad \cot h^2 x - 1 = \operatorname{cosec} h^2 x$$

மாதிரிக் கணக்கு 1.

மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப்பகுதி (real part, imaginary part) என்று பிரித்து எழுதுக.

(a) $\tan (\alpha + i\beta)$ (B. Tech. '68) (b) $\sec h (\alpha + i\beta)$

(a) $$\tan (\alpha + i\beta) = \frac{\sin (\alpha + i\beta)}{\cos (\alpha + i\beta)}$$

$$= \frac{2 \sin (\alpha + i\beta) \cos (\alpha - i\beta)}{2 \cos (\alpha + i\beta) \cos (\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin i (2\beta)}{\cos 2\alpha + \cos i (2\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + i \sin h (2\beta)}{\cos 2\alpha + \cos h (2\beta)}$$

$$\therefore \quad \text{மெய்ப் பகுதி} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos h (2\beta)}$$

$$\text{கற்பனைப் பகுதி} = \frac{\sin h (2\beta)}{\cos 2\alpha + \cos h (2\beta)}$$

(b) $\sec h(\alpha + i\beta) = \dfrac{1}{\cos h(\alpha + i\beta)}$

$$= \frac{1}{\cos i(\alpha + i\beta)} \qquad \text{[சூத்திரம் (C)]}$$

$$= \frac{1}{\cos(i\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{2\cos(i\alpha + \beta)}{2\cos(i\alpha + \beta)\cos(i\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{2[\cos(i\alpha)\cos\beta - \sin(i\alpha)\sin\beta]}{\cos i(2\alpha) + \cos 2\beta}$$

$$= \frac{2(\cos h\,\alpha\cos\beta - i\sin h\,\alpha\sin\beta)}{\cos h(2\alpha) + \cos 2\beta}$$

$\therefore$ மெய்ப் பகுதி $= \dfrac{2\cos h\,\alpha\cos\beta}{\cos h(2\alpha) + \cos 2\beta}$

கற்பனைப்பகுதி $= \dfrac{-2\sin h\,\alpha\sin\beta}{\cos h(2\alpha) + \cos 2\beta}$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$\sin(x + iy) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ என்றால்,

(அ) $\rho^2 = \dfrac{1}{2}[\cos h(2y) - \cos 2x]$

(ஆ) $\tan\alpha = \cot x\tan hy$ என்று காண்பிக்கவும்.

$$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy$$
$$= \sin x\cos hy + i\cos x\sin hy$$

$$\therefore\ \rho\cos\alpha = \sin x\cos hy \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\rho\sin\alpha = \cos x\sin hy \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(அ) (1) ஐயும், (2) ஐயும் வர்க்கமெடுத்துக் கூட்டுக

$$\rho^2 = \sin^2 x\cos h^2 y + \cos^2 x\sin h^2 y$$
$$= \sin^2 x\cos^2 iy - \cos^2 x\sin^2 iy$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos i(2y)]$$

$$- \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}[1 - \cos i(2y)]$$

$$= \frac{1}{4}[1 + \cos i(2y) - \cos 2x - \cos 2x \cos i(2y)]$$

$$- \frac{1}{4}[1 - \cos i(2y) + \cos 2x - \cos 2x \cos i(2y)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos i(2y) - \cos 2x]$$

$$\therefore \quad \rho^2 = \frac{1}{2}[\cos h(2y) - \cos 2x]$$

(ஆ) (2) ஐ (1) ஆல் வகுக்கவும்.

$$\tan \alpha = \cot x \tan hy.$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$x + iy = \tan(A + iB)$ என்றால்,

(அ) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2A = 1$

(ஆ) $x^2 + y^2 - 2y \cot h(2B) + 1 = 0$ என்று நிறுவுக.

$\tan(A + iB) = x + iy$ என்பதால்,

$\tan(A - iB) = x - iy$ ஆகும்.

(அ) $\tan 2A = \tan[(A + iB) + (A - iB)]$

$$= \frac{\tan(A+iB) + \tan(A-iB)}{1 - \tan(A+iB)\tan(A-iB)}$$

$$= \frac{(x+iy) + (x-iy)}{1 - (x+iy)(x-iy)}$$

$$= \frac{2x}{1 - (x^2+y^2)}$$

$$\therefore \quad \cot 2A = \frac{1 - x^2 - y^2}{2x}$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + 2x \cot 2A = 1$$

(ஆ) $\tan i(2B) = \tan[(A+iB)-(A-iB)]$

$$= \frac{\tan(A+iB) - \tan(A-iB)}{1 + \tan(A+iB)\tan(A-iB)}$$

$$= \frac{(x+iy)-(x-iy)}{1+(x+iy)(x-iy)}$$

அதாவது $i \tan h\,(2B) = \frac{i\,2y}{1+x^2+y^2}$

$$\therefore \quad \cot h\,(2B) = \frac{1+x^2+y^2}{2y}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-2y\cot h\,(2B)+1=0$$

மாதிரிக் கணக்கு 3 :

$\tan h\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ என்றால்,

(அ) $\sin h\,u = \tan\theta$ (ஆ) $u \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

என்றும் நிறுவுக.

(அ) $\tan h\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\therefore \; -i\tan i\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

ஆனால் $\sin h\,(u) = \frac{1}{i}\sin iu = -i \cdot \frac{2\tan i\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2 i\left(\frac{u}{2}\right)}$

இப்போது சமன்பாடு (1)-ஐப் பயன்படுத்துக.

$$\sin h\,u = -\frac{i\left[2\,i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{1+i^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

அதாவது $\sin h u = \tan\theta$

(ஆ) $\tan h\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\therefore \quad \frac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{e^{u/2} + e^{-u/2}} = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1}$$

கூட்டுக்கழி விகித சமம் (Componendo et dividendo) பயன்படுத்துக.

$$\frac{2\,e^{u/2}}{2\,e^{-u/2}} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \quad e^{u/2}\, e^{+u/2} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \quad u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

பயிற்சி 5.

1. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக.

(அ) $\sin h\, C + \sin h\, D = 2\sin h\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos h\left(\frac{C-D}{2}\right.$

(ஆ) $\sin h\, C - \sin h\, D = 2\cos h\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin h\left(\frac{C-D}{2}\right.$

(இ) $\cos h\,(A+B) + \cos h\,(A-B) = 2\cos h\, A \cos$

(ஈ) $2\sin h\, A\, \sin h\, B = \cos h\,(A+B) - \cos h\,(A-$

2. கீழ்வருவனவற்றில் மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப் பகுதி என்று பிரித்து எழுதுக.

(அ) $\sin(\alpha+i\beta)$ (ஆ) $\sin h(\alpha+i\beta)$

(இ) $\cos(\alpha+i\beta)$ (ஈ) $\cos h(\alpha+i\beta)$

(உ) $\tan h(\alpha+i\beta)$ (ஊ) $\cot(\alpha+i\beta)$

(B. Tech. '72)

(எ) $\operatorname{cosec}(\alpha+i\beta)$ (ஏ) $\operatorname{cosec} h(\alpha+i\beta)$

(ஐ) $\cot h(\alpha=i\beta)$ (ஓ) $\sec(\alpha+i\beta)$

(ஓ) $\sec h(\alpha-i\beta)$

3. $x+iy=\sin(A+iB)$ என்றால்,

(அ) $\dfrac{x^2}{\cos h^2 B}+\dfrac{y^2}{\sin h^2 B}=1$

(ஆ) $\dfrac{x^2}{\sin^2 A}-\dfrac{y^2}{\cos^2 A}=1$

என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '65 S. V. Vty.)

4. $x+iy=\cos(u+i.v)$ ஆனால்,

(அ) $(1+x)^2+y^2=(\cos hv+\cos u)^2$

(ஆ) $(1-x)^2+y^2=(\cos hv-\cos u)^2$ என்று காண்பிக்கவும்.

5. $x+iy=\cos h(u+iv)$ ஆனால்,

(அ) $\dfrac{x^2}{\cos h^2 u}+\dfrac{y^2}{\sin h^2 u}=1$

(ஆ) $\dfrac{x^2}{\cos^2 v}-\dfrac{y^2}{\sin^2 v}=1$ என்று நிறுவுக.

6. $\sin(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$ என்றால்,

$\cos^2 x=\pm\sin\alpha$

7. $\sin(\theta+i\phi)=\tan\alpha+i\sec\alpha$ ஆனால்,

$\cos 2\theta\cos h(2\phi)=3$

8. $\sin(\theta+i\phi)=\tan(x+iy)$ என்றால்,

$\dfrac{\tan\theta}{\tan h\phi}=\dfrac{\sin 2x}{\sin h(2y)}$ என்று காண்பிக்கவும்.

9. $\cos(x+iy) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ என்றால்,

(அ) $\sin^2 x = \pm\sin\alpha$ என்றும்,

(ஆ) $\cos 2x + \cos h\,(2y) = 2$ என்றும் நிறுவுக.

(B. E. '70)

10. $\cos(x+iy) = \gamma(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ என்றால்,

$$y = \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right]$$ என்று நிறுவுக.

11. $u + iv = \tan(x+iy)$ என்றால்,

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin 2x}{\sin h\, 2y}$$ என்று காண்பிக்கவும்.

12. $\tan(\theta+i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ என்றால்,

(அ) $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (ஆ) $\phi = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

என்று நிறுவுக.

13. $\tan hx = \sin\theta$ என்றால், (அ) $\sin hx = \tan\theta$

(ஆ) $\cos hx = \sec\theta$ (இ) $x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

என நிறுவுக.

14. $\tan h\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ என்றால் $\cos x \,.\, \cos hx = 1$

என்று காண்பிக்கவும்.

15. $e^x = \sec\theta + \tan\theta$ என்றால் $\sec\theta = \cos hx$ என்று நிறுவுக.

(B. Tech. '72)

16. $\tan y = \tan\alpha \,.\, \tan h\beta$, $\tan z = \cot\alpha \,.\, \tan h\beta$ என்றால், $\tan(y+z) = \sin h\, 1\beta \,.\, \operatorname{cosec} 2\alpha$ என்று நிறுவுக.

17. $\tan(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$ என்றால்,

(அ) $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

(ஆ) $e^{2\phi} = \pm\cot\frac{\alpha}{2}$ என்று நிறுவுக.

18. $\tan(\alpha+i\beta) = i$ என்றால், α என்பது ஒரு தேராக் கணியம் (indeterminate quantity) என்றும், β முடிவிலி (infinity) என்றும் நிறுவுக.

19. $32 \cos h^6\theta = \cos h(6\theta) + 6 \cos h(4\theta) + 15 \cos h(2\theta) + 10$

என்று காட்டுக.

$$\left(\text{குறிப்பு :} \quad \cos h^6\theta = \left[\frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})\right]^6\right)$$

20. $64 \sin h^7\theta = \sin h\, 7\theta - 7 \sin h\, 5\theta + 21 \sin h\, 3\theta - 35 \sin h\theta$

என்று காண்பிக்கவும்.

§ 20. நேர்மாறு கோணகணித அதிபரவளைச் சார்புகள் (Inverse trigonometric and hyperbolic functions)

$x + iy = \cos(u + iv)$ என்றால்

$u + iv$ என்பதை $x + iy$-ன் நேர்மாறு கொசைன்* என்று கூறுகிறோம். குறியீடு முறையில்

$u + iv = \cos^{-1}(x + iy)$

என்று எழுதுகிறோம்.

ஆனால் $x + iy = \cos(u + iv) \cos[2n\pi \pm (u + iv)]$

எனவே $\cos^{-1}(x + iy) = 2n\pi \pm (u + iv)$

இதிலிருந்து $\cos^{-1}(x + iy)$ ஒரு பல மதிப்புடைய (multi valued) சார்பு என்பது புலனாகிறது.

இதேபோல் $\sin^{-1}(x + iy)$, $\tan^{-1}(x + iy)$, $\sec^{-1}(x + iy)$. $\operatorname{cosec}^{-1}(x + iy)$, $\cot^{-1}(x + iy)$ ஆகியவைகளும் பல மதிப்புடைய சார்புகளாகும்.

மேலும் $x + iy = \cos h(\alpha + i\beta)$ என்றால் $\alpha + i\beta$ என்பதை $x + iy$-ன் நேர்மாறு அதிபரவளை கொசைன்** என்பர். குறியீடு முறையில்

$\alpha + i\beta = \cos h^{-1}(x\ iy)$

என்று எழுதப்படும்.

---

* inverse cosine

** inverse hyperbolic cosine

$$\cos h(\alpha + i\beta) = \cos [i(\alpha + i\beta)]$$

$$= \cos h [2n\pi \pm i(\alpha + i\beta)]$$

$$= \cos \left[i \left\{ \frac{2n\pi}{i} \pm (\alpha + i\beta) \right\} \right]$$

$$= \cos h [2n\pi i \pm (\alpha + i\beta)]$$

$$\therefore \quad \cos h^{-1}(x+iy) = 2n\pi i \pm (\alpha + i\beta)$$

இதிலிருந்து எல்லா நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகளும் பல மதிப் புடையவை என்று தெரிகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$\tan^{-1}(\alpha + i\beta)$-வை மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப் பகுதி என்று பிரித்து எழுதுக.

$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$ என்போம்.

அதனால் $\alpha + i\beta = \tan(x + iy)$

மேலும் $\alpha - i\beta = \tan(x - iy)$ ஆகும்

இப்போது $\tan 2x = \tan (x + iy) + (x - iy)$

$$= \frac{\tan(x + iy) + \tan(x - iy)}{1 - \tan(x+iy)\tan(x - iy)}$$

$$= \frac{(\alpha - i\beta) + (\alpha - i\beta)}{1 - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right\}$$

மேலும் $\tan i(2y) = \tan [(x + iy) - (x - iy)]$

$$= \frac{\tan(x + iy) - \tan(x - iy)}{1 + \tan(x + iy)\tan(x - iy)}$$

$$= \frac{(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)}{1 + (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}$$

அதாவது, $i \tan h\,(2y) = \dfrac{2i\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2} \tan h^{-1} \left\{ \frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2} \right\} \quad \dots (1)$$

இதை வேறுவிதமாகவும் எழுதலாம்.

$$\tan h\,(2y) = \frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}} = \frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$\frac{2\,e^{2y}}{2\,e^{-2y}} = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta}$$

$$e^{4y} = \frac{(1 + \beta)^2 + \alpha^2}{(1 + \beta)^2 + \alpha^2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{4} \log \left\{ \frac{(1+\beta)^2 + \alpha^2}{(1-\beta)^2 + \alpha^2} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad x + iy = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right) + \frac{i}{2} \tan h^{-1} \left(\frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2} \right)$$

மேலே உள்ளது தலையாய மதிப்பு (principal value) பொது மதிப்பு $= n\pi +$ தலையாய மதிப்பு.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$-வை மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதி என்று பிரித்து எழுதுக.

(θ ஒரு குறுங்கோணம் என்க.)

$\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$ என்போம்.

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos(x + iy)$$

$$= \cos x \cos hy - i \sin x \sin hy$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \cos x \cos hy \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\sin\theta = -\sin x \sin hy \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) இவ்வைகளின் வர்க்கங்கள் எடுத்துக் கூட்டுக.

$$1 = \cos^2 x \cos h^2 y + \sin^2 x \sin h^2 y$$

$$= \cos^2 x (1 + \sin h^2 y) + (1 - \cos^2 x) \, sih^2 y)$$

அதாவது $1 = \cos^2 x + \sin h^2 y$

$$\therefore \quad \sin^2 x = \sin h^2 y \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

(3)-ஐ, (2)-ல் இட்டால்,

$$\sin^2\theta = \sin^2 x \, . \, \sin^2 x = \sin^4 x$$

$$\therefore \quad \sin x = \sqrt{\sin\theta} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

அதாவது $x = \sin^{-1} \sqrt{\sin\theta}$

மேலும் (3), (4) இவைகளிலிருந்து

$$\sin h^2 y = \sin\theta$$

அல்லது $\sin hy = \sqrt{\sin\theta}$

$$\therefore \quad e^y - e^{-y} = 2\sqrt{\sin\theta}$$

$$(e^y)^2 - 2e^y \sqrt{\sin\theta} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad e^y = \sqrt{\sin\theta} \pm \sqrt{1 + \sin\theta}$$

இதில் — குறியை ஒதுக்கவேண்டும் ($\because \quad e^y \not< 0$)

$$\therefore \quad y = \log\left[\sqrt{\sin\theta} + \sqrt{1 + \sin\theta}\right]$$

$$\therefore \quad \cos^{-1}(\cos\theta + i \sin\theta) = \sin^{-1}\sqrt{\sin\theta} + i \log\left[\sqrt{\sin\theta} + \sqrt{1 + \sin\theta}\right]$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$\cos h^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ என நிறுவுக.

$\cos h^{-1} x = y$ என்போம்.

$$\therefore \quad x = \cos hy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{2}\left(e^y + \frac{1}{e^y}\right)$$

$$2x = \frac{(e^y)^2 + 1}{e^y}$$

அதாவது $(e^y)^2 - 2x \cdot e^y + 1 = 0$

$$\therefore \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ அல்லது } \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \quad y = \pm \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

பொதுவாக வலப்பக்கத்தில் + அடையாளம் உள்ள கோணை தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \cos h^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$\tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ என நிறுவுக. (B. Tech. '69)

$\tan h^{-1} x = y$ என்போம்.

$$\therefore \quad x = \tan hy$$

அல்லது $\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{x}{1}$

$$\therefore \quad \frac{2\, e^y}{2\, e^{-y}} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \quad e^y \cdot e^{-y} = e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\therefore \quad \tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

பயிற்சி 6.

1. $\tan^{-1} (\cos \theta + i \sin \theta)$-வை மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதி என்று பிரித்து எழுதுக.

[விடை : $\pm \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \log \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}\right)$; $\cos \theta$-வின் குறி + அல்லது − என்றால், முறையே $+\frac{\pi}{4}$ அல்லது $\frac{-\pi}{4}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க.]

2. $\sin h^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ என்று நிறுவுக.
(B. Tech. 68, 70, 71)

3. x மெய்யெண் என்றால், $\sin h^{-1}x$, $\cos h^{-1}x$, $\tan h^{-1}x$ ஆகியவை ஒரு மதிப்புடைய சார்புகள் என்று காண்பிக்கவும்.

4. a, b மெய்யெண்கள். $p = a + ib$, $q = a - ib$, $pe^p + qe^q$ ஒரு மெய்யெண் என நிறுவுக. (B. E. '72)

5. நிறுவுக : $\sin h^{-1}x = \cos h^{-1}(\sqrt{1+x^2})$ (B. Tech. '68)

§ 21. கலப்பு எண்களின் மடக்கை (Logarithm of Complex Numbers)

வரைவிலக்கணம்

$\alpha + i\beta = e^{x+iy}$ என்றால், $x + iy$ என்ற கலப்பு எண் e அடிக்கு $(\alpha + i\beta)$-வின் ஒரு மடக்கை என்று கூறுவர். ($x+iy$ is a logarithm of $\alpha+i\beta$ to the base e)

$$e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$$

எனவே, $e^{x+iy}\, e^{2n\pi i} = e^{x+iy}$

$$\therefore \quad \alpha + i\beta = e^{x + i(y + 2n\pi)}$$

$$\therefore \quad \log_e(\alpha + i\beta) = x + i(y + 2n\pi)$$

இது $\alpha + i\beta$-ன் பொது மடக்கையைக் குறிக்கும். $n = 0$ என்றால், தலையாய மடக்கையைக் குறிக்கும். பொது மடக்கையைக் குறிக்க $\text{Log}(\alpha + i\beta)$ என்றும் தலையாய மடக்கையைக் குறிக்க $\log(\alpha + i\beta)$ என்றும் எழுதுவது மரபு.

அதாவது $\alpha + i\beta = e^{x + i(y + 2n\pi)}$ என்றால்,

$$\log(\alpha + i\beta) = x + iy$$

$$\text{Log}(\alpha + i\beta) = x + i(y + 2n\pi)$$

§21·1 log ($\alpha + i\beta$)-வைப் பிரித்து எழுதுதல்

$$\alpha + i\beta = re^{i\theta}$$ என்போம்.

$$\therefore \quad r + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \ \theta = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\therefore \quad \log \alpha + i\beta = \log\left\{re^{i\theta}\right\}$$

$$= \log r + \log e^{i\theta}$$

$$= \log r + i\theta \quad (\because \quad \log_e e = 1)$$

$$= \log \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + i \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\therefore \quad \log(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) + i \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (1)$$

மேலும்

$$\text{Log}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2 + \beta^2) + i\left[2n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right] \quad (2)$$

§21·2. ஒரு நேர் மெய்யெண்ணின் மடக்கை ஒரு மெய்மதிப்பும் பல கற்பனை மதிப்புகளும் உடையது (A positive real number has one real logarithm and infinitely many imaginary ones)

நிறுவல் :

§21·1-ல் $\beta = 0$ என்று இட்டால்

$$\text{Log}\, \alpha = \frac{1}{2} \log \alpha^2 + i(2n\pi + \tan^{-1} 0)$$

அதாவது $\text{Log}\, \alpha + \log \alpha + i2n\pi i$

இதில் தலையாய மடக்கை நாம் அறிந்துள்ள சாதாரண நேப்பிரியன் $\log \alpha$

§21·3 ஒரு எதிர் மெய்யெண்ணின் மடக்கை எப்போதும் கலப்பு எண் ஆகும் (Logarithm of a negative real number is always complex)

$-\alpha = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta) \ (\alpha > 0)$ என்போம்.

$r \cos\theta = -\alpha$

$r \sin\theta = 0 \qquad \therefore r = +\sqrt{(-\alpha)^2 + 0^2} = +\alpha$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\alpha}{r} = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1, \ \sin\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \pi$$

$$\therefore -\alpha = \alpha e^{i\pi}$$

$$\therefore \log(-\alpha) = \log\alpha + \pi i$$

மேலும் $\text{Log}(-\alpha) = \log\alpha + \pi i + 2n\pi i$

§21·4. **தூய கற்பனை எண்ணின் மடக்கை (Logarithm of a purely imaginary number)**

§21·1—ல் சமன்பாடு (1)-ல், $\alpha = 0$ என்றால்

$$\log(i\beta) = \frac{1}{2}\log\beta^2 + i\tan^{-1}\infty$$

அதாவது $\log(i\beta) = \log\beta + i\frac{\pi}{2}$

மேலும் $\text{Log}(i\beta) = \log\beta + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

குறிப்பு:

$\beta = 1$ என்றால், $\log(i) = i\frac{\pi}{2}$; $\text{Log}(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

§21·5. $(\alpha + i\beta)^{x+iy}$**-யை மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதி எனப் பிரித்தல்**

$a^x = e^{x\log_e a}$ என நாம் அறிவோம்

ஆகவே $(\alpha + i\beta)^{x+iy} = e^{(x+iy)(\text{Log}(\alpha+i\beta))}$

$$= e^{(x+iy)[\log r + i(\theta + 2n\pi)]}.$$

$$\begin{cases} r = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

$$= e^{\{x \log r - y(\theta + 2n\pi)\} + i\{y \log r + x(\theta + 2n\pi)\}}$$

$$= e^{x \log r} \cdot e^{-y(\theta + 2n\pi)} \, e^{i\{y \log r + x(\theta + 2n\pi)\}}$$

$$\therefore \quad (\alpha + iy)^{x + iy} = r^x e^{-y(\theta + 2n\pi)}$$

$$[\cos\{y \log r + x(\theta + 2n\pi)\} + i \sin\{y \log r + x(\theta + 2n\pi)\}]$$

இதில் $n = 0$ என்று இட்டால், தலையாய மதிப்பு கிடைக்கும்.

அதாவது $(\alpha + i\beta)^{x+y} = r^x e^{-y} [\cos(y \log r + x\theta) + i \sin(y \log r + x\theta)]$

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$-\pi < \theta \leqslant \pi$ என்றால்,

$$\log(1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \log(2 \cos \theta) + i\theta$$

என்று நிறுவுக.

$1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta = \alpha + i\beta$ என்போம்.

§ 21·1-ல் விளக்கியபடி,

$$\log(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) + i \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

இங்கே $\alpha = 1 + \cos 2\theta, \quad \beta = \sin 2\theta$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \alpha^5 + \beta^2 &= (1 + \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta \\ &= 1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \\ &= 2(1 + \cos 2\theta) \\ &= 4 \cos^2\theta = (2 \cos \theta)^2\end{aligned}$$

மேலும், $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \dfrac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2\theta}$

$$= \tan \theta$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \tan^{-1}(\tan \theta) = \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad &\log(1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \log(2 \cos \theta)^2 + i\theta \\ &= \log(2 \cos \theta) + i\theta.\end{aligned}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$\log\left\{\frac{\cos(x-iy)}{\cos(x+iy)}\right\} = 2i\tan^{-1}(\tan x\tan hy)$$

என்று காண்பிக்கவும்.

$$\cos(x-iy) = \cos x\cos hy + i\sin x\sin hy$$

$$= \alpha + i\beta \text{ என்போம்.}$$

$$\therefore \cos(x+iy) = \alpha - i\beta \text{ ஆகும்.}$$

$$\log(\alpha+i\beta) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) + i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

மேலும் $\log(\alpha - i\beta) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) - i\tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta}$

$$\therefore \log\left\{\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right\} = \log(\alpha+i\beta) - \log(\alpha-i\beta)$$

$$= 2i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

இங்கே $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin x\sin hy}{\cos x\cos hy} = \tan x\tan hy$

$$\therefore \log\left\{\frac{\cos(x-iy)}{\cos(x+iy)}\right\} = \log\left\{\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right\} = 2i\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= 2i\tan^{-1}(\tan x\tan hy) \quad \therefore$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

தலையாய மதிப்புகளை மட்டும் பயன்படுத்தி

$$i^{i^{i\cdots\cdots\infty}} = A + iB \text{ என்றால்}$$

$$\tan\frac{\pi A}{2} = \frac{B}{A};\ A^2 + B^2 = e^{-\pi B} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

கொடுத்த சமன்பாட்டை

$$i^{A+iB} = A + iB \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

அதாவது $e^{(A+iB)\log i} = A + iB$

ஆனல் $\log i = \frac{i\pi}{2}$

$$\therefore \quad e^{(A+iB)\frac{i\pi}{2}} = A + iB$$

இருபக்கங்களிலும் மடக்கை (logarithm) எடுத்தால்,

$$(A+iB)\frac{\pi i}{2} = \log(A+iB)$$

அதாவது $\frac{i\pi A}{2} - \frac{\pi B}{2} = \frac{1}{2}\log(A^2+B^2) + i\tan^{-1}\frac{B}{A}$

மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினல்

$$i\tan^{-1}\frac{B}{A} = \frac{i\pi A}{2} \qquad \therefore \quad \frac{B}{A} = \tan\left(\frac{\pi A}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\log(A^2+B^2) = -\frac{\pi B}{2} \quad \therefore \quad A^2+B^2 = e^{-\pi B}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4 :

$\text{Log}_i\, i = \frac{4m+1}{4n+1}$ (m, n முழு எண்கள்) என்று நிறுவுக.

$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே, $\text{Log}_i\, i = \frac{\text{Log}_e\, i}{\text{Log}_e\, i}$ ... ... (1)

சமன்பாடு (1)-ல் வலப் பக்கத்தில் தொகுதியும் பகுதியும் சமம் ஆகாது என்பதை நன்ருகத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். தலையாய மதிப்புகளாயிருந்தால் சமம் ஆகும்.

இப்போது $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ (தலையாய மதிப்பு)

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)} \quad \text{(பொது மதிப்பு)}$$

எனவே, $\text{Log}_e\, i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = i(4m+1)\frac{\pi}{2}$

இதேபோல் மற்றெரு $\text{Log}_e\, i = i(4n+1)\frac{\pi}{2}$

இவைகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\text{Log}_i\, i = \frac{i\,(4m+1)\,\frac{\pi}{2}}{i\,(4n+1)\,\frac{\pi}{2}} = \frac{4m+1}{4n+1}$$

குறிப்பு : m, n வெவ்வேறு முழு எண்கள், $m = n$ அல்லது $m = 0 = n$ ஆகும்போது மாத்திரம் $\text{Log}_i\, i = \log_i i = 1$.

பயிற்சி 7.

பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக.

1. $\log(1 + i\tan\alpha) = \log\sec\alpha + i\alpha$ (α குறுங்கோணம்)

2. $\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}$

   $\text{Log}(1+i)$-ன் மதிப்பு என்ன ?

   விடை : $\text{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

3. $\text{Log}\sin(x+iy) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cos h\,2y - \cos 2x} + i\tan^{-1}(\cos x\,.\,\tan hy)$

4. $i\log\frac{x-i}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1}x$

5. $\log\log\sin(x+iy) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) + i\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

   $\alpha = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{2}(\cos h\,2y - \cos 2x)\right\}$

   $\beta = \tan^{-1}(\cot x\ \tan hy)$

6. i^i-ன் தலையாய மதிப்பு $= e^{-\pi/2}$

7. $\theta = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi\,.\,e^{-\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$ என்றால்,

   $i^{i^{i}} = \cos\theta + i\sin\theta$

8. $a^{\alpha+i\beta} = (x+iy)^{p+iq}$ என்றால்,

$$\alpha = \frac{1}{2} p \log_a (x^2+y^2) - q \tan^{-1} \frac{y}{x} \cdot \log_a e$$

$$\log_a (x^2+y^2) = 2\left(\frac{\alpha p + \beta q}{p^2 + q^2}\right)$$

(தலையாய மதிப்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்க)

9. $\tan\left[\, i \log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right] = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

10. $\tan \log (x+iy) = a + ib$ என்றால், $\tan \log (x^2 + y^2)$

$\frac{2a}{1-a^2-b^2}$ என்று நிறுவுக. (B. E. '69)

§ 22. தொடர் கூட்டல் (Summation of series)

இப்போது கோண விகித சார்புகள் கொண்ட தொடர் கூட்டல் காணும் முறையை ஆராய்வோம். தீமாய்வர் தேற்றத்தை அல்லது ஆய்லர் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திய பிறகு, மேற்படி தொடரானது, பெருக்கு விருத்தி பெருக்குத் தொடர் (geometric progression), ஈருறுப்புத் தொடர் (binomial series), அடுக்குக் குறித் தொடர் (exponential series) அல்லது மடக்கைத் தொடர் (logarithmic series) உருவத்தில் அமைந்தால் அந்தத் தொடரில் கூட்டல் காண்பது எளிது. ஈண்டு அங்ஙனம் அமையும் சில எளிமையான தொடர்களின் கூட்டலைக் காணும் முறை கூறப்படும். எல்லா விதமான கோண விகித சார்புகள் கொண்ட தொடர்களுக்கும் இம் முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டல் காண முடியாது என்பதை நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும்.

பெருக்கு விருத்தி பெருக்குத் தொடரில் அமையப் பெற்ற தொடரில் n உறுப்புகளின் கூட்டலையும், முடிவிலி வரை உறுப்புகளின் கூட்டலையும் காண முடியும். ஆனால் மற்ற வகைத் தொடரில் அமையப் பெற்ற தொடரில் முடிவிலிவரை தான் கூட்டல் காண இயலும். கீழ் வரும் மாதிரிக் கணக்குகளைக் கூர்ந்து கவனித்தால் கூட்டல் காணும் முறை தெள்ளத் தெளிய விளங்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

கீழ் வரும் தொடரில் முதலில் n உறுப்புகளின் கூட்டல் மதிப்பையும், பின்பு முடிவிலிவரை கூட்டல் மதிப்பையும் காண்க.

(அ) $C \equiv 1 + k\cos\alpha + k^2\cos 2\alpha + \ldots + k^{n-1}(n-1)\alpha$

(ஆ) $S \equiv k\sin\alpha + k^2\sin 2\alpha + \ldots + k^{n-1}\sin(n-1)\alpha$

$$C + iS = 1 + k(\cos\alpha + i\sin\alpha) + k^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + k^{n-1}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1\alpha]$$

$$= 1 + ke^{i\alpha} + k^2e^{i2\alpha} + \ldots + k^{n-1}e^{i(n-1)\alpha}$$

(இது ஒரு பெ. வி. பெ. தொ.)

$$= \frac{1-(ke^{i\alpha})^n}{1-ke^{i\alpha}} = \frac{(1-k^ne^{i\alpha})(1-ke^{-i\alpha})}{(1-ke^{i\alpha})(1-ke^{-i\alpha})}$$

$$= \frac{1-ke^{-i\alpha} - k^ne^{in\alpha} + k^{n+1}e^{+i(n-1)\alpha}}{1-k(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+k^2}$$

அதாவது $C + iS$

$$= \frac{1-k(\cos\alpha - i\sin\alpha) - k^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + k^{n+1}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha]}{1-2k\cos\alpha+k^2}$$

மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப் பகுதி ஆகியவற்றைச் சமன்படுத்துக.

$$C = \frac{1-k\cos\alpha - k^n\cos n\alpha + k^{n+1}\cos(n-1)\alpha}{1-2k\cos\alpha+k^2}$$

$$S = \frac{k\sin\alpha - k^n\sin n\alpha + k^{n+1}\sin(n-1)\alpha}{1-2k\cos\alpha+k^2}$$

இப்போது $n \to \infty$ ஆகும்போது $k^n \to 0$ ($k < 1$ என்றால்)

ஆகவே $k > 1$ என்றால்

$$C_\infty = \frac{1-k\cos\alpha}{1-2k\cos\alpha+k^2}$$

$$S_\infty = \frac{k\sin\alpha}{1-2k\cos\alpha+k^3}$$

குறிப்பு : cosine தொடரின் கூட்டல் மதிப்பை மட்டிலும் கண்டுபிடிக்க நேரிடினும் அதற்குப் பொருத்தமான sine தொடரையும் பயன்படுத்தவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது என்பதை அறியவும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

கீழ்வரும் முடிவிலா தொடர் கூட்டலின் மதிப்பைக் காண்க. (n ஒரு நேர் முழு எண்)

$$S \equiv n \sin \alpha + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \sin 2\alpha + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3\alpha + \dots \dots \dots \dots \infty$$

கொடுத்துள்ள sine தொடருக்குப் பொருத்தமான cosine தொடரைப் பின்வருமாறு எடுத்துக்கொள்க.

$$C \equiv 1 + n \cos \alpha + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cos 2\alpha + \dots \dots \infty$$

மேற்படி இரண்டு தொடர்களை $C + iS$ என்று கூட்டி,

$$\cos r\alpha + i \sin r\alpha = e^{ir\alpha}$$

என்ற ஆய்லர் சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தினால்

$$C + iS = 1 + ne^{i\alpha} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} e^{i2\alpha} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{i3\alpha} + \dots$$

(இது ஒரு ஈருறுப்புத் தொடர்)

$$= (1 - e^{i\alpha})^{-n} \quad (\alpha \neq 2k\pi \text{ என்றால்})$$

$$= (1 - \cos \alpha - i \sin \alpha)^{-n}$$

$$= \left[2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - i\, 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right]^{-n}$$

$$= \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-n} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-n}$$

அதாவது $C + iS$

$$= \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-n} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2}\right)\right]$$

மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்

$$C = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n}$$

$$S = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n}$$

குறிப்பு: $\alpha = 2K\pi$ என்றால்

$$C + iS = \left(1 - e^{i\alpha}\right)^{-n} = \left(1 - e^{i2k\pi}\right)^{-n}$$

$$= \frac{1}{(1-1)^n} \quad \left(\because \; e^{i2k\pi} = 1\right)$$

அதாவது, $C + iS + \infty$

$\therefore \; C = \infty, \; S = 0.$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

கீழ் வரும் முடிவிலா தொடர் கூட்டலின் மதிப்பைக் காண்க.

$$S \equiv \sin\alpha + k\sin(\alpha+\beta) + \frac{k^2}{\angle 2}\sin(\alpha+2\beta) + \ldots \infty$$

கொடுத்த தொடருக்குப் பொருத்தமான cosine-தொடர்

$$C \equiv \cos\alpha + k\cos(\alpha+\beta) + \frac{k^2}{\angle 2}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots \infty$$

$$\therefore \; C + iS = {}^{i\alpha} + ke^{i(\alpha+\beta)} + \frac{k^2}{\angle 2} e^{i(\alpha+2\beta)} + \ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} + ke^{i\alpha}.e^{i\beta} + \frac{k^2}{\angle 2} e^{i\alpha} e^{i2\beta} + \ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{\left(ke^{i\beta}\right)}{\angle 1} + \frac{\left(ke^{i\beta}\right)^2}{\angle 2} + \frac{\left(ke^{i\beta}\right)^3}{\angle 3} + \ldots\right]$$

(இது ஒரு அடுக்குக் குறித் தொடர்)

$$= e^{i\alpha} e^{\left(ke^{i\beta}\right)}$$

$$= e^{i\alpha} . e^{k(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= e^{k\cos\beta + i(\alpha + k\sin\beta)}$$

$$= e^{k\cos\beta} . e^{i(\alpha + k\sin\beta)}$$

அதாவது, $C + iS$

$$= e^{k\cos\beta}\,[\cos(\alpha + k\sin\beta) + i\sin(\alpha + k\sin\beta)]$$

மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப்பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினல்,

$$C = e^{k\cos\beta} . \cos(\alpha + \sin\beta)$$

$$S = e^{k\cos\beta} \sin(\alpha + k\sin\beta)$$

குறிப்பு : இங்கே k ஏதாவது ஒரு மெய் எண்ணுக இருக்கலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 4.

கீழ் வரும் முடிவிலாத் தொடர் கூட்டலின் மதிப்பைக் காண்க.

$$C \equiv k\cos\alpha - \frac{k^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{k^3}{3}\cos 3\alpha - \ldots \text{ to } \infty$$

கொடுத்த தொடருக்குப் பொருத்தமான sine-தொடர்

$$S \equiv k\sin\alpha - \frac{k^2}{2}\sin 2\alpha + \frac{k^3}{3}\sin 3\alpha - \ldots \text{ to } \infty$$

ஆகும்.

$$\therefore\ C + iS = ke^{i\alpha} - \frac{k^2e^{i2\alpha}}{2} + \frac{k^3e^{i3\alpha}}{3} - \ldots \infty$$

(இது ஒரு மடக்கைத் தொடர்)

$$= \log(1 + ke^{i\alpha})\ k \neq 1 \text{ மற்றும் }$$

$$\alpha \neq (2n+1)\pi \text{ என்ருல்)}$$

$$= \log(1 + k\cos\alpha + ik\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \log \{(1 + k\cos\alpha)^2 + k^2 \sin^2\alpha\} + i\tan^{-1}\left\{\frac{k\sin\alpha}{1 + k\cos\alpha}\right\}$$

அதாவது, $C + iS$

$$= \frac{1}{2}\log(2+2k\cos\alpha) + i\tan^{-1}\left\{\frac{k\sin\alpha}{1+k\cos\alpha}\right\}$$

மெய்ப்பகுதி கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்துக.

$$C = \frac{1}{2}\log(2 + 2k\cos\alpha)$$

$$S = \tan^{-1}\left\{\frac{k\sin\alpha}{1 + k\cos\alpha}\right\}$$

குறிப்பு: (1) $k = 1$ மேலும் $\alpha = (2n+1)\pi$ என்றால்,

$$ke^{i\alpha} = e^{i2n\pi + i\pi} = e^{i\pi} = -1$$

$$\therefore \log(1 + ke^{i\alpha}) = \log 0 = -\infty$$

$$\therefore c = -\infty, \quad S = 0$$

(2) $k = 1$ ஆனால், $\alpha \neq (2n+1)\pi$ என்றால்,

$$C = \frac{1}{2}\log(2 + 2\cos\alpha) = \log\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

பயிற்சி 8.

கீழ்க்கண்ட தொடர்களின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

1. $\cos\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos^3\alpha \cos 3\alpha + \ldots$ மு. வ.

2. $\sin\alpha + k\sin(\alpha + \beta) + k^2\sin(\alpha + 2\beta) + \ldots$

இந்தத் தொடரில் முதலில் n உறுப்புகளின் கூட்டல் மதிப்பையும் பின்பு முடிவிலி வரை கூட்டல் மதிப்பையும் காண்க.

3. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \frac{1}{2^3}\sin 4\alpha + \ldots$
மு. வ. (B. Tech. '68)

4. $1 + k\cosh\alpha + k^2\cosh 2\alpha + k^3\cosh 3\alpha + \ldots \ldots$
மு. வ. $(k < 1)$

5. $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin 2\alpha + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\sin 3\alpha + \ldots$ மு. வ.

6. $\cos^n\alpha - n\cos^{n-1}\alpha \,.\, \cos\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}$
$\cos^{n-2}\alpha \,.\, \cos 2\alpha + \ldots + \ldots$ $(n+1)$ உறுப்புகள்
(n ஒரு நேர் முழு எண்)

7. $\sin\alpha + n\sin(\alpha+\beta) + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\sin(\alpha+2\beta) + \ldots$
$+ \ldots$ $(n+1)$ உறுப்புகள் (n ஒரு நேர் முழு எண்) (B. Tech. '69)

8. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin 5\alpha + \ldots$ மு. வ.

9. $1 - \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \frac{\cos^2\alpha}{\angle 2}\cos 2\beta - \frac{\cos^3\alpha}{\angle 3}$
$\cos 3\beta + \ldots$ மு. வ.

10. $\cos\alpha + k\cos(\alpha+\beta) + \frac{k^2}{\angle 2}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots$ மு. வ.

11. $1 + \frac{k^2\cos 2\theta}{\angle 2} + \frac{k^4\cos 4\theta}{\angle 4} + \ldots$ மு. வ.

12. $1 + \cosh\alpha + \frac{\cosh 2\alpha}{\angle 2} + \frac{\cosh 3\alpha}{\angle 3} + \ldots$ மு. வ.

13. $\cos\alpha - \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\angle 3} + \frac{\cos(\alpha+4\beta)}{\angle 5} - \ldots$ மு. வ.

14. $k\sin\alpha + \frac{k^2}{2}\sin 2\alpha + \frac{k^3}{3}\sin 3\alpha + \ldots \ldots \ldots$ மு. வ.

15. $k\cos\alpha + \frac{k^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{k^5}{5}\cos 5\alpha + \ldots \ldots \ldots$ மு. வ.

16. $k \cos \alpha - \frac{k^3}{3} \cos(\alpha + 2\beta) + \frac{k^5}{5} \cos(\alpha + 4\beta)$
$+ \dots \dots \dots$ மு. வ.

17. $\sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta + \frac{1}{3} \sin 3\alpha \sin 3\beta$
$+ \dots \dots \dots$ மு. வ.

18. $\sin h\, \alpha - \frac{1}{2} \sin h\, 2\alpha + \frac{1}{3} \sin h\, 3\alpha - \dots \dots$ மு. வ.

19. $\cos \alpha - \frac{1}{3} \cos 3\alpha + \frac{1}{5} \cos 5\alpha - \dots \dots \dots$ மு. வ.

விடைகள்

1. $\alpha \neq n\pi$ என்றால். கூட்டல் மதிப்பு $= 0$

2. $$\frac{\sin \alpha - k \sin(\alpha - \beta) - k^n \sin(\alpha + n\beta) + k^{n+1} \sin\{\alpha + (n-1)\beta\}}{1 - 2k \cos \beta + k^2}$$

$$S_\infty = \frac{\sin \alpha - k \sin(\alpha - \beta)}{1 - 2k \cos \beta + k^2}$$

3. $\dfrac{3 \sin \alpha}{5 - 4 \cos \alpha}$ 4. $\dfrac{1 - k \cos h\, \alpha}{1 - 2k \cos h\, \alpha + k^2}$

5. $\sin\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right) \Big/ \sqrt{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$
($\alpha = 2n\pi$ என்றால், $S = 0$)

6. n ஒற்றை முழு எண் என்றால் கூட்டல் மதிப்பு $= 0$

n இரட்டை முழு எண் என்றால் கூட்டல் மதிப்பு

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha$$

7. $\left(2 \cos \frac{\beta}{2}\right)^n \cdot \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)$

8. $\alpha \neq n\pi$ என்றால், $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \Big/ \sqrt{2 \sin \alpha}$

9. $e^{-\cos\alpha\cos\beta} . \cos(\cos\alpha\sin\beta)$

10. $e^{k\cos\beta}\cos(\alpha + k\sin\beta)$

11. $\cos(k\sin\theta) . \cos h(k\cos\theta)$

12. $e^{\cos h\alpha} . \cos h(\sin h\alpha)$

13. $\sin(\cos\beta)\cos h(\sin\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$-\cos(\cos\beta)\sin h(\sin\beta)\sin(\alpha-\beta)$

14. (அ) $k = 1$ மற்றும் $\alpha = 2n\pi$
(ஆ) $k = -1$ மற்றும் $\alpha = (2n+1)\pi$

இந்த வகைகள் இல்லாதபோது $S = -\tan^{-1}\left(\frac{-k\sin\alpha}{1-k\cos\alpha}\right)$

மேற்படி இரண்டு வகைகளின்போது $S = 0$

15. $\frac{1}{4}\log\left\{\frac{1+2k\cos\alpha+k^2}{1-2k\cos\alpha+k^2}\right\}$

16. $\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\tan^{-1}\left(\frac{2k\cos\beta}{1-k^2}\right)$
$-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\tan h^{-1}\left(\frac{2k\sin\beta}{1+k^2}\right)$

17. $\alpha+\beta$-வும், $\alpha-\beta$-வும் 2π-ன் மடங்காக இல்லா விட்டால், $\frac{1}{2}\log\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

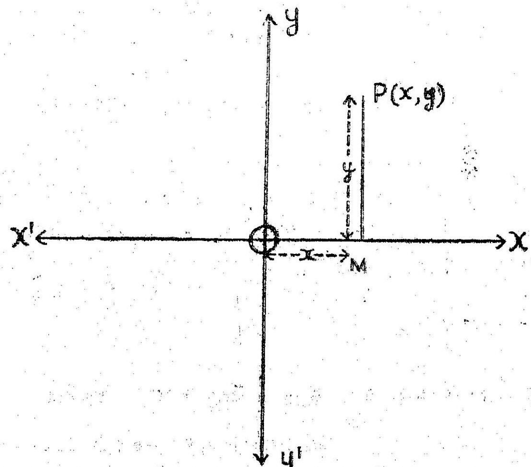
18. $\frac{\alpha}{2}$ 19. $\cos\alpha > 0$ என்றால், $\frac{\pi}{4}$; $\cos\alpha < 0$ என்றால், $\frac{-\pi}{4}$; $\cos\alpha = 0$ என்றால், 0

3. ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்

(Co-ordinate Geometry)

தொடக்கக் கருத்துக்களின் அறிமுகம் (Introduction of elmentary ideas)

§ 1. $x'Ox$, yOy' என்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று O என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக வெட்டட்டும். $x'Ox$ என்ற நேர் கோட்டை x-அச்சு (x — *axis*) என்றும், yOy' என்ற நேர் கோட்டை y-அச்சு என்றும், O என்ற வெட்டும் புள்ளியை ஆதி (origin) என்றும் கூறுவர் (படம் 12).



படம் 12.

$\overrightarrow{Ox}$ என்ற வெக்டரின் திசை x-அச்சின் நேர்த்திசை (positive direction) என்றும், $\overrightarrow{Ox'}$ என்ற வெக்டரின் திசை. x-அச்சின்

எதிர்த்திசை (negative direction) என்றும் கூறுவர். இதேபோல் $\vec{Oy}$, $\vec{Oy'}$ இவைகளின் திசைகளை முறையே y-அச்சின் நேர், எதிர்த் திசைகளாகும். இந்த நான்கு அச்சுகளும் ஒரு தளத்தை (plane) நான்கு காற்பகுதிகளாகப் (quadrant) பிரிக்கின்றன. xOy, yOx', $x'Oy'$, $y'Ox$ ஆகிய நான்கு காற்பகுதிகளை முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது காற்பகுதிகள் என அழைக்கிறோம்.

இந்த தளத்தில் P என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PM என்ற நேர்கோடு வரைக. வெக்டர் $\vec{OM}$-ஐ P-யின் x-ஆயத்தொலை (x-co-ordinate) கிடைத் தூரம் அல்லது மட்டாயம் (abscissa) என்றும், வெக்டர் $\vec{MP}$-யை P-யின் y-ஆயத்தொலை (y-co-ordinate) அல்லது நிலைத்தூரம் (ordinate) என்றும் கூறுவர். $\vec{OM} = x$, $\vec{MP} = y$ என்றால், (x, y) இவைகளை மொத்தமாக ஆயத்தொலைகள் என்றும் கூறுவர். ஆயத் தொலை(கள்) என்பதை இனிச் சுருக்கமாக ஆ. தொ. எனக் குறிப்போம். ஆயத்தொலைகளை முதலில் x-ஆ. தொ. பின்பு y-ஆ. தொ. என்ற வரிசை (order) யில்தான் எழுதப்படவேண்டும். இது மிக அவசியம். ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளுக்கு மதிப்பு, குறி இவைகள் இரண்டும் உண்டு என்பதையும் அறியவும்.

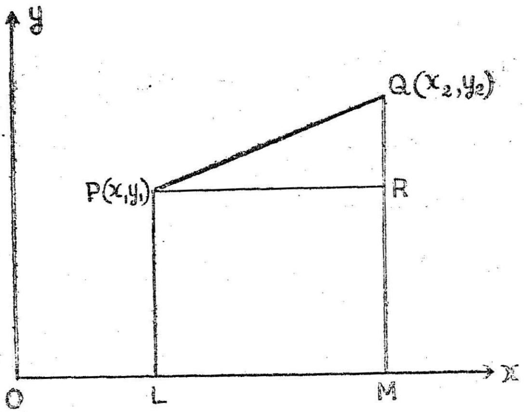
மேற்கூறிய விளக்கத்திலிருந்து ஒரு புள்ளிக்கு ஒரே ஒரு கண ஆ. தொ. களும், ஒரு கன (set) ஆ. தொ. களுக்குப் பொருத்த மாக ஒரே ஒரு புள்ளிதான் உண்டு என்று திட்டவட்டமாகத் தெரிகிறதல்லவா? இனி வருவனவற்றில், $P(x_1, y_1)$ என்பதற்கு, "x_1-ஆ. தொ.-யும், y_1-ஆ. தொ.-யும் உள்ள P என்ற புள்ளி" என பொருள்கொள்ளவும்.

§ 2. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் என்போம். x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PL, QM என்ற கோடு களையும், QM-க்கு ⊥ ஆக PR என்ற கோட்டையும் வரைக.

$\triangle PQR$-ல் $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

ஆனால், $PR = x_2 - x_1$, $RQ = y_2 - y_1$



படம் 13.

எனவே, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

ஆனால், $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$; $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$

$\therefore \quad PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

குறிப்பு : படம (13)-ல், P, Q என்ற புள்ளிகளை மாற்றி எடுத்துக்கொண்டால் மேற்கண்ட சூத்திரம் நேரடியாகக் கிடைக்கும்.

§ 3. PQ என்ற நேர் கோட்டை உள்ளும் புறமுமாக (internally and externally) $l : m$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணல் :

கொடுத்துள்ள புள்ளிகள் P, Q-களின் ஆ. தொ. முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்போம். $R(x_i, y_i)$ என்ற புள்ளி PQ-வை $l : m$ என்ற உள் விகிதத்தில் வெட்டட்டும்.

x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PL, QM, RN என்ற கோடுகளையும், NR, MQ-களுக்கு ⊥ ஆக PS, RT என்ற கோடுகளையும் வரைக. (படம் 14).

$$PS = x_i - x_1, \quad RT = x_2 - x_i$$

$$SR = y_i - y_1, \quad TQ = y_2 - y_i$$

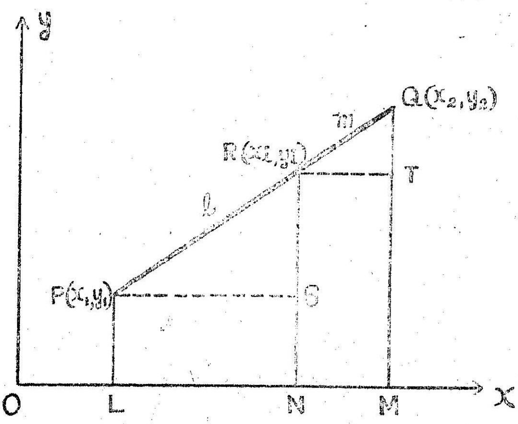
$\triangle$ PSR, $\triangle$ RTQ என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{PS}{RT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{l}{m}; \quad \text{அதாவது,} \ \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_i} = \frac{l}{m}$$

$$\therefore \quad mx_i - mx_1 = lx_2 - lx_i$$

$$\therefore \quad (l + m)\, x_i = lx_2 + mx_1$$

$$\therefore \quad x_i = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$$



படம் 14.

இதேபோல் $y_i = \dfrac{ly_2 + my_1}{l + m}$.

$R'(x_e, y_e)$ என்ற புள்ளி PQ-வை $l : m$ என்ற புற விகிதத்தில் வெட்டினால்

$$\overrightarrow{PR'} : \overrightarrow{R'Q} = l : -m \ (\overrightarrow{R'Q} = -\overrightarrow{QR'})$$

எனவே, மேலே கண்ட சூத்திரத்தில் m-க்குப் பதிலாக $-m$ இட வேண்டியது.

$$\therefore \quad x_e = \frac{lx_2 - mx_1}{l - m}$$

$$y_e = \frac{ly_2 - my_1}{l - m}.$$

குறிப்பு: (1) M என்ற புள்ளி PQ-வின் நடுப்புள்ளி என்றால் $l : m = 1 : 1$.

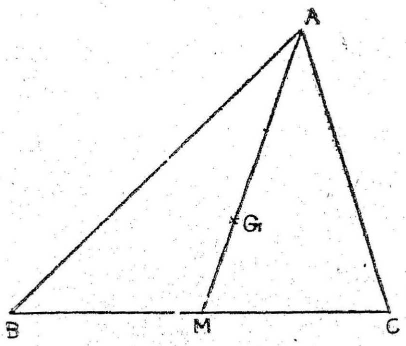
எனவே M-ன் ஆ. தொ. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

(2) $l : m$ என்ற விகிதத்திற்குப் பதிலாக $\lambda : 1$ என்ற விகிதம் எடுத்துக் கொள்வோம். அப்போது

$$x_i = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}; \qquad y_i = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$$

$$x_e = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1}; \qquad y_e = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1}$$

3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்றால், அதன் ஈர்ப்பு மையம் (centroid) $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ஆகும்.



படம் 15.

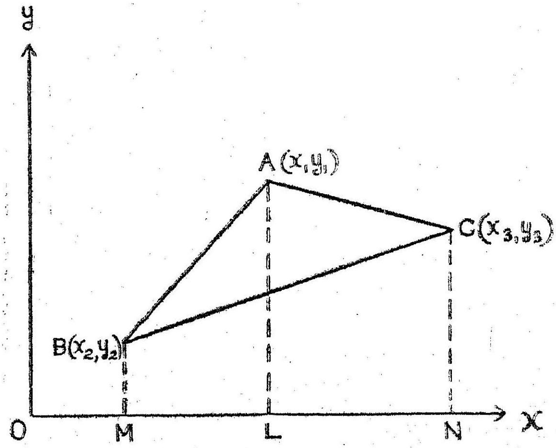
நிறுவல்: $M\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ என்பது BC-ன் நடுப் புள்ளி. G என்ற புள்ளி AM-ஐ $2 : 1$ என்ற உள் விகிதத்தில் வெட்டினால், அந்தப் புள்ளி முக்கோணத்தின் ஈர்ப்பு மையம் ஆகும்.

G-ன் ஆ. தொ. (x_G, y_G) என்ருல்

$$x_G = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \cdot x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

இதேபோல் $y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

§ 4, **முக்கோணத்தின் பரப்பு**



படம் 16.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்போம்.

x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக AL, BM, CN வரைக.

$\triangle ABC$-யின் பரப்பளவு (படம் 16)

$= $ சரிவகம் (trapezium) $ABML$

$+$ சரிவகம் $ALNC$ $-$ சரிவகம் $BMNC$

$$= \frac{1}{2}(AL + BM) \cdot ML + \frac{1}{2}(AL + CN) \cdot LN$$
$$- \frac{1}{2}(BM + CN) \cdot MN$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - 1\frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

மேற்கண்டவற்றைச் சுருக்கினுல்

$\triangle$ ABC-யின் பரப்பு,

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma x_1(y_2 - y_3)$$

குறிப்பு: (1) 3-வது உச்சி C ஆதி (O, O)-வுடன் பொருந்தினுல், $x_3 = O = y_3$

$$\therefore \quad \triangle\, OAB\text{-யின் பரப்பு} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

(2) மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் வரும் பரப்பின் மதிப்புடன் — குறியும் சேர்வதுண்டு. A, B, C என்ற புள்ளிகள் இடஞ்சுழியாக (anticlockwise) இருந்தால், அல்லது வலஞ்சுழியாக (clockwise) இருந்தால், முக்கோணம் $\triangle$ ABC-யின் பரப்பு முறையே + குறி அல்லது — குறியுடன் வரும்

(3) A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்தால்,

$$\triangle\, ABC\text{-யின் பரப்பு} = \frac{1}{2}\Sigma x_1(y_2 - y_3) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$(-3, 2)$, $(-7, -6)$ $(-3, -8)$ என்ற புள்ளிகளால் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் உண்டாகும் என்று காண்பிக்கவும்.

கொடுத்துள்ள புள்ளிகளை A, B, C என முறையே பெயரிடுவோம்.

$$AB^2 = (-7+3)^2 + (-6-2)^2 = 16 + 64 = 80$$

$$BC^2 = (-3+7)^2 + (-8+6)^2 = 16 + 4 = 20$$

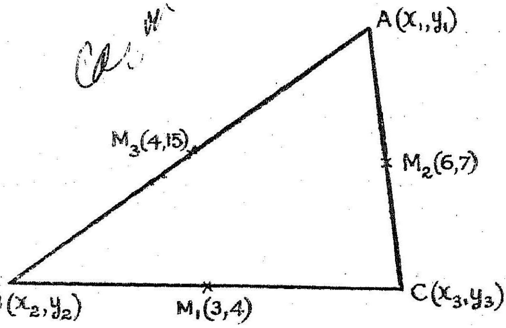
$$CA^2 = (-3+3)^2 + (-8-2)^2 = 0 + 100 = 100$$

$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = CA^2$

$\therefore \quad \triangle ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் (3, 4), (6, 7), (4, 15) என்றால் அதன் உச்சிகளைக் காண்க.



படம் 17.

முக்கோணத்தின் உச்சிகளை $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்று குறிப்பிட்டால், $M_1(3, 4)$, $M_2(6, 7)$, $M_3(4, 15)$ என்பவை முறையே BC, CA, AB-களின் நடுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

எனவே, $\dfrac{x_2 + x_3}{2} = 3, \quad \dfrac{y_2 + y_3}{2} = 4$

அதாவது, $x_2 + x_3 = 6 \quad \ldots (1) \qquad y_2 + y_3 = 8 \quad \ldots (2)$

இதுபோன்றே $x_3 + x_1 = 12 \quad \ldots (3); \qquad y_3 + y_1 = 14 \quad \ldots (4)$

$x_1 + x_2 = 8 \quad \ldots (5); \qquad y_1 + y_2 = 30 \quad \ldots (6)$

(1), (3), (5) இவைகளைக் கூட்டினால்,

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 26$$

அல்லது $x_1 + x_2 + x_3 = 13 \quad \ldots \quad (7)$

$(7) - (1); \qquad x_1 = 7$

$(7) - (3); \qquad x_2 = 1$

$(7) - (5); \qquad x_3 = 5$

(2) + (4) + (6) ; $y_1 + y_2 + y_3 = 26$ ... (8)

(8) − (2) ; $y_1 = 14$

(8) − (4) ; $y_2 = 12$

(8) − (6) ; $y_3 = -4$

எனவே உச்சிகள் $A(7, 14)$, $B(1, 12)$, $C(5, -4)$ ஆகும்.

§ 5. நியமப்பாதையின் சமன்பாடு (Equation to a locus)

ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்தில், ஒரு புள்ளி $P(x, y)$-யின் நியமப்பாதை, அந்தப் புள்ளியின் ஆ. தொ. x, y-களின் சார்புச் சமன்பாடாக எழுதப்படுகிறது. (equation of functions of co-ordinates). $f(x, y) = 0$ என்பது ஒரு நியமப் பாதையின் (சார்புச்) சமன்பாடு என்றால், அந்த நியமப்பாதையில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் ஆ. தொ.-களும் அந்த சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்யும். ஆனால் அந்த நியமப்பாதையின்மேல் இல்லாத புள்ளியின் ஆ. தொ. அந்த சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்யாது.

§ 6. நியமப் பாதையின் சார்புச் சமன்பாடு காணும் முறை

(1) நியமப் பாதையின்மேல் உள்ள மாதிரிப் புள்ளியாக $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

(2) அந்தப் புள்ளி நகரும் நியமம் என்ன என்பதை எடுத்து எழுதுக.

(3) அந்த நியமத்தைப் பயன்படுத்தி x_1-க்கும், y_1-க்கும் தொடர்பு உண்டாக்கும் ஒரு சமன்பாடு காண வேண்டும்.

(4) இந்த மாதிரிப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$-யின் (சார்புச்) சமன்பாடு கிடைத்த பிறகு, அந்த நியமப்பாதையின் எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்துமாறு சமன்பாடு அடைவதற்கு, x_1-க்குப் பதிலாக x-ஐயும், y_1-க்குப் பதிலாக y-ஐயும் பிரதியிடல் வேண்டும். அதாவது. (3)-ல் கூறியபடி x_1, y_1 களில் சார்புச் சமன்பாடு கிடைத்த பிறகு அதில் வரும் கீழ்க்குறி (suffix) 1 ஐ நீக்கிவிட்டால் போதும். நாம் விரும்பிய நியமப் பாதையின் (சார்புச்) சமன்பாடு கிடைத்துவிடும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3.

y-அச்சிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம், x-அச்சிலிருந்து அதே புள்ளியின் தூரத்தைக் காட்டிலும் 3 மடங்காக இருக்கிறது. அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை யாது?

அந்தப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்போம்.

$\therefore$ x-அச்சிலிருந்து P-யின் தூரம் $= y_1$

y-அச்சிலிருந்து அதன் தூரம் $= x_1$

கணக்கின்படி $x_1 = 3y_1$

$\therefore$ P-யின் நியமப்பாதை (கீழ்க்குறி 1-ஐ நீக்கிய பின்பு) $x = 3y$ (இது ஒரு நேர்கோடு என்று பின்பு காண்போம்).

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$A(a, o)$, $B(o, b)$ என்பவை இரு நிலையான புள்ளிகள் (fixed points). P என்ற புள்ளி $PA : PB = 1 : 2$ என்று இருக்கும்படி நகர்ந்தால், P-யின் நியமப்பாதை யாது?

P-யின் ஆ. தொ. (x_1, y_1) என்போம்.

$$PA^2 = (x_1 - a)^2 + (y - o)^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 + a^2$$

$$PB^2 = (x_1 - o)^2 + (y_1 - b)^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2$$

$$PA : PB = 1 : 2 \quad \therefore \quad 4PA^2 = PB^2$$

அதாவது $4\{x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 + a^2\} = x_1^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2$

$$\therefore \quad 3(x_1^2 + y_1^2) - 8ax_1 + 2by_1 + 4a^2 - b^2 = 0$$

$\therefore$ P-யின் நியமப் பாதை

$$3(x^2 + y^2) - 8ax + 2by + 4a^2 - b^2 = 0.$$

(இது ஒரு வட்டம் என்று பின்பு காண்போம்).

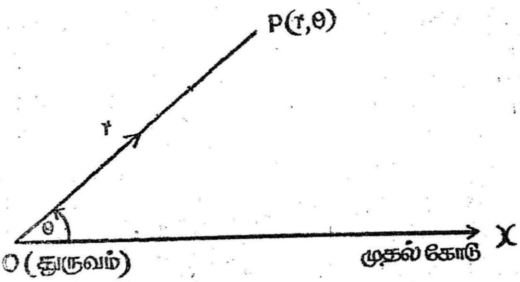
§6. துருவ ஆயத்தொலைகள் (Polar co-ordinates)

இதுவரை நாம் பார்த்த ஆயத்தொலைகளைக் கார்டீசியன் ஆயத்தொலைகள் (cartesian co-ordinates) என்று கூறுவர்* இதைத் தவிர துருவ ஆயத்தொலைகள் (polar co-ordinates) என்ற வேறொரு முறையாலும் ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பிடலாம்.

* Rene De Carte என்ற பிரெஞ்சு கணிதமேதை ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்தைக் கண்டுபிடித்தவர்.

Ox என்ற ஒரு நிலையான நேர்கோட்டை எடுத்துக்கொள்க. இதற்கு முதல்கோடு (initial line) என்று பெயர். O என்ற புள்ளிக்கு துருவம் அல்லது முனைவு (pole) என்று பெயர்.

P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்றால், $\overrightarrow{OP} = r$ என்போம் $x\hat{O}P = \theta$ என்போம் θ-வைக் காண Ox-லிருந்து இடஞ்சுழியாக OP வரை சுழற்றவேண்டும்.)



படம் 18.

(r, θ) என்ற இந்த வரிசையில் எழுதப்பட்ட கணியங்களைத் துருவ ஆயத்தொலைகள் என்பர். r-ஐ ஆரவெக்டர் (radius vector) என்றும், θ-வை வெக்டர் கோணம் (vectorial angle) என்றும் அழைப்பது வழக்கம் (படம் 18).

குறிப்பு: இந்த துருவ ஆ. தொ. முறையில் ஒரு புள்ளியை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விதங்களில் குறிக்கலாம். உதாரணமாக, படம் 6-ல் உள்ள P என்ற புள்ளியை (r, θ) என்ற துருவ ஆ. தொ. களால் மட்டும் அல்லாமல், $(-r, \theta - \pi)$ என்ற துருவ ஆ. தொ. களாலும் குறிக்கலாம்.]

§7. கார்டீசியன் ஆயத்தொலைகளுக்கும் துருவ ஆயத்தொலைகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு

படம் 19-ல் Ox என்பது x-அச்சாகவும் அதே சமயத்தில் அதை முதல்கோடாகவும் கொள்க. O என்பது ஆதியாகவும், துருவமாகவும் இருக்கட்டும்.

P என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் கார்டீசியன் ஆ. தொ. (x, y) என்றும், துருவ ஆ. தொ. (r, θ) என்றும் இருக்கட்டும். படத்திலிருந்து

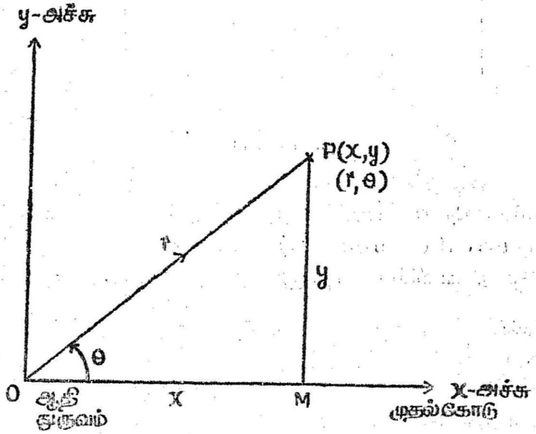
$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}\ ; \ \sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\therefore\quad x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

என்பதும்

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

என்பதும் வெளிப்படை. இவைகள் மேற்படி இரு முறைகளை இணைக்கும் தொடர்புகள் ஆகும்.

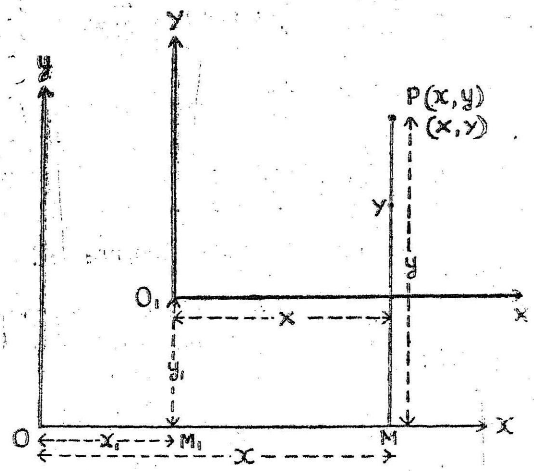


படம் 19.

§ 8. ஆதியை மாற்றுதல் (change of origin)

Ox, Oy என்பவை பழைய அச்சுகள் என்போம். ஆதி O-வை, $O_1\ (x_1, y_1)$-க்கு மாற்றி அமைக்கும்போது, O_1X, O_1Y என்ற புதிய அச்சுகள் பழைய அச்சுகளுக்கு இணையாக இருக்கட்டும். தளத்தில் உள்ள P என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின், பழைய அச்சுகளைக் குறித்து ஆ. தொ. (x, y) என்றும் புதிய அச்சுகளைக் குறித்து ஆ. தொ. (X, Y) என்றும் இருக்கட்டும் (படம் 20).

படத்திலிருந்து $\left.\begin{array}{l} x = x_1 + X \\ y = y_1 + Y \end{array}\right\}$



படம் 20.

என்று தெளிவாகிறது. இதில் வரும் (X, Y) ஆ. தொ. களை நடப்பு ஆ. தொ. (current co-ordinates) என்று கூறுவர். மேலே கண்ட தொடர்புகளை நினைவில் கொள்ளுவது அவசியம்.

மேற்கண்ட முடிவுகள், P எந்த காற்பகுதியில் இருந்தாலும் பொருந்தும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5.

(i) $x^2 - y^2 = a^2$, (ii) $y^2 = 4ax$ என்ற கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைத் துருவ சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(i) $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$\therefore \quad r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = a^2$$

அதாவது $r^2\cos 2\theta = a^2$

(ii) $r^2\sin^2\theta = 4a \cdot r\cos\theta$

$$\therefore \quad r\sin^2\theta = 4a\cos\theta$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$r = a\cos\theta + b\sin\theta$ என்ற துருவ சமன்பாட்டை கார்டீசியன் சமன்பாடாக மாற்றுக.

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = a \cdot \frac{x}{r} + b \cdot \frac{y}{r}$$

$$r^2 = ax + by$$

அதாவது $x^2 + y^2 = ax + by$

மாதிரிக் கணக்கு 7.

ஆதியை $(3, -5)$ என்ற புள்ளிக்கு மாற்றினால் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு எவ்வித மாறுதல் அடையும்?

(X, Y) நடப்பு ஆ. தொ. என்போம்.

$$\therefore \quad x = 3 + X, \; y = -5 + Y$$

$$\therefore \quad (3 + X)^2 + (-5 + Y)^2 + 2g(3 + X) + 2f(-5 + Y) + c = 0$$

அதாவது $X^2 + Y^2 + 2gX + 2fY + 6X = 10Y + 9 + 25 + 6g - 10f + c = 0$

அதாவது $X^2 + Y^2 + 2(g + 3)X + 2(f - 5)Y + 6g - 10f + c + 34 = 0$

பயிற்சி 1.

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

(அ) $(1, 0), (0, 1)$ (ஆ) $(3, 1), (-5, -3)$

(இ) $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$

(ஈ) $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$

(உ) $a\cos\theta, b\sin\theta), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$

2. $(4, 1), \left(\frac{7}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{5}\right)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

3. ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று உச்சிகள் $(-5, 12)$, $(-2, -3)$, $(9, -10)$ என்றால் நான்காவது உச்சி எது.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளின் ஆ. தொ. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), மற்றும் அவ்வுச்சிகளின் எதிர்ப் பக்கங்கள் முறையே a, b, c என்றால் அந்த முக்கோணத்தின் உள் மையத்தின் ஆ. தொ. காண்க.

5. $(2, 1)$, $(8, 25)$, $(21, 9)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் மையம், ஈர்ப்பு மையம், பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. கீழ்வரும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

(அ) $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, $\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$, $\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$

(ஆ) $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2^2)$ $(at_3, 2at_3)$

(இ) $(2, -5)$, $(4, -1)$, $(-4, -2)$

7. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. அந்த நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(அ) $(1, 1)$, $(4, 3)$, $(-2, 5)$, $(-7, 4)$

(ஆ) $(-1, 6)$, $(-3, -9)$, $(3, 9)$, $(5, -8)$

8. $A(2, 3)$, $B(-3, 4)$, என்பவை இரு நிலைப் புள்ளிகள். P என்ற புள்ளி $\triangle ABP$-யின் பரப்பு 8·5 ச. அலகு இருக்கும்படி நகர்ந்தால் P-யின் நியமப்பாதை $x + 5y - 34 = 0$ என்று நிறுவுக.

9. θ-வின் மதிப்பு மாறும்போது $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என நிறுவுக.

10. $A(4, 0)$, $B(-4, 0)$ என்பவை நிலைப் புள்ளிகள். P என்ற புள்ளி $AP + PB = 16$ என இருக்குமாறு நகர்ந்தால், அதன் நியமப்பாதை யாது?

11. ஒரு முக்கோணத்தின் பரிதி (perimeter) 20 அலகு அதன் இரு உச்சிகள் $(2, -3)$, $(2, 3)$. மூன்றாவது உச்சியின் நியமப் பாதை யாது? (B. E. '72)

12. கீழ்வரும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைத் துருவ சமன்பாடுகளாக மாற்றுக :

(அ) $y = mx + c$ (ஆ) $x^2 + y^2 = a^2$

(இ) $x^3 + y^3 = 3axy$

13. பின்வரும் துருவ சமன்பாடுகளை கார்டீசியன் சமன்பாடுகளாக மாற்றியமைக்கவும்.

(அ) $r = a$ (ஆ) $r = a \sin^2 \frac{\theta}{2}$ (இ) $r \cos 2\theta = 2a \sin \theta$

14. பின்வரும் புள்ளியின் ஆ. தொலைகளில் t-ன் மதிப்பு மாறும்போது, அப் புள்ளியின் நியமப்பாதை காண்க.

(அ) $(at^2, 2at)$ (ஆ) $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$

(இ) $a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (ஈ) $(a \cos^4 t, a \sin^4 t)$

விடைகள்

1. (அ) $\sqrt{2}$ (ஆ) $4\sqrt{5}$

(இ) $a(t_1 - t_2)\sqrt{4 + (t_1 + t_2)^2}$

(ஈ) $c\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\sqrt{1 + t_1^2 t_2^2}$

(உ) $2 \sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)$

$$\sqrt{a^2 \sin^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)}$$

3. (6, 5) (4) $\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$

5. உள் மையம் $\left(11, \frac{23}{2}\right)$, ஈர்ப்பு மையம் $\left(\frac{31}{3}, \frac{35}{3}\right)$,

பரப்பு 268 ச. அலகு.

6. (அ) $\frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{2abc}$

(ஆ) $a^2 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$

(இ) 15 ச. அலகு.

7. (அ) $\frac{41}{2}$ ச. அலகு (ஆ) 96 ச. அலகு

10. $3x^2 + 4y^2 = 192$ 11. $\frac{(x-2)^2}{40} + \frac{y^2}{49} = 1$

12. (அ) $r \sin\theta = mr\cos\theta + c$ (ஆ) $r = a$

(இ) $r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3a\sin\theta\cos\theta$

13. (அ) $x^2 + y^2 = a^2$

(ஆ) $(2x^2 + 2y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

(இ) $x^2 - y^2 = 2ay$

14. (அ) $y^2 = 4ax$ (ஆ) $xy = c^2$

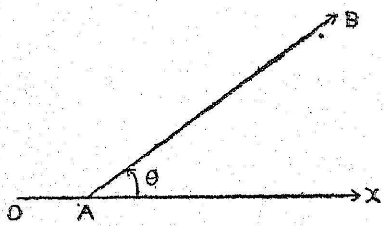
(இ) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (ஈ) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

துணை அதிகாரம் 2.

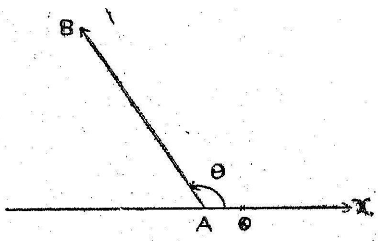
நேர்கோடு

§ 9. கொடுத்த இரு புள்ளிகளில் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றுக்குச் செல்லும் மிகச் சுருங்கிய பாதைக்கு (shortest distance) **நேர்கோடு** என்று பெயர்.

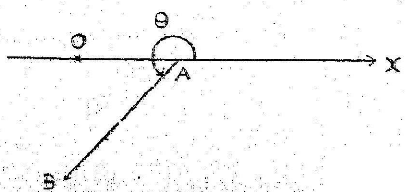
§ 9·1. **சரிவு அல்லது சாய்வு விகிதம்** (slope or gradient)



படம் 21 (a)



படம் 21 (b)



படம் 21 (c)

AB என்ற நேர்கோடு x-அச்சை A-யில் வெட்டட்டும். Ax-ஐ இடஞ்சுழியாக (in the anliclockwise sense) θ° கோணம் வரை சுழற்றினால் AB-யுடன் பொருந்தும் என்போம். $\tan\theta$ என்ற (அலகில்லாத) எண்ணுக்கு சரிவு அல்லது சாய்வு விகிதம் என்று பெயர்.

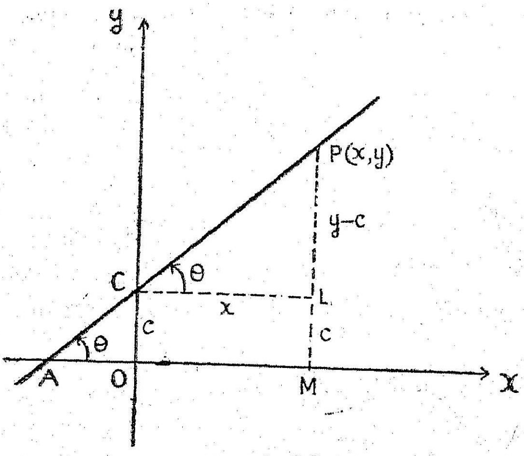
படங்கள் 21 (a), 21 (b), 21 (c) ஆகியவற்றிலிருந்து θ-வின் மதிப்பு 0° முதல் 360° வரை மாறலாம் என்றும், அதனால் $\tan\theta$ (அதாவது) சரிவின் மதிப்பு $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை மாற லாம் என்றும் அறிகிறோம்.

$\theta = 0$ என்றால், x-அச்சைக் குறிக்கும்.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ என்றால், y-அச்சைக் குறிக்கும் சரிவுகள் முறையே 0, ∞ ஆகும்.

பொதுவாக ஒரு நேர்கோட்டின் சரிவை "m" என்ற எழுத்தால் குறிப்பது வழக்கம். அதாவது, $m = \tan\theta =$ சரிவு அல்லது சாய்வு விகிதம்.

§10. சரிவு m-ஆகவும், y-அச்சை c-தூரத்தில் வெட்டுவதாகவும் உள்ள நேர்கோடு.



படம் 22.

$P(x, y)$ என்ற புள்ளி மேற்படி நேர்கோட்டில் அமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்போம். அந்தக் கோடு x-அச்சை

A-யில் θ கோணத்தில் வெட்டட்டும். x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக PM, MP-க்கு $\perp$ ஆக CL வரைக.

$$OC = c, \; CL = x, \; LP = y - c, \; \tan\theta = m.$$

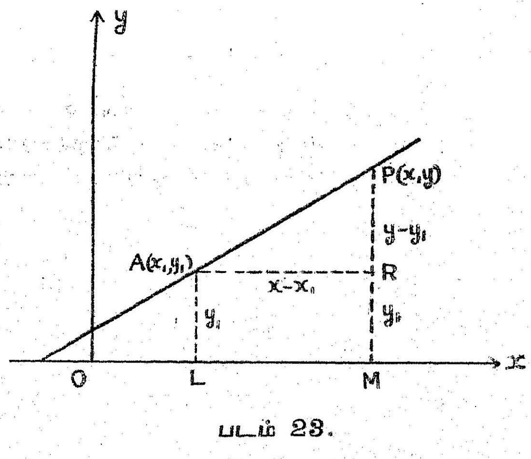
$$\therefore \quad m = \tan\theta = \frac{y-c}{x}$$

அதாவது $y = mx + c$.

குறிப்பு: 1. y-அச்சை வெட்டும் தூரத்தை, y-வெட்டுத் துண்டு (y intercept) என்றும் கூறுவர்.

2. ஒரு நேர்கோடு ஆதி (0, 0) வழியாகச் சென்றால் $c = 0$ ஆகும். எனவே ஆதி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு $y = mx$ ஆகும்.

§ 11. கொடுத்துள்ள புள்ளி $A(x, y)$ வழியாகச் செல்லும் சரிவு 'm' உடைய நேர்கோடு.



படம் 23.

$P(x, y)$ என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளி கொடுத்த நேர்கோட்டில் இருக்கட்டும். x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக AL, PM, MPக்கு $\perp$ ஆக AR, வரைக.

$\widehat{RAP} = \theta$ என்றால் $m = \tan\theta$

$AR = x - x_1$, $RP = y - y_1$

$$\therefore \quad \tan\theta = m = \frac{y - y_1}{m - x_1}$$

அதாவது, $y - y_1 = m(x - x_1)$ ... ... (1)

துணை முடிவு :

$\vec{AP} = r$ என்றால்,

$$\frac{y - y_1}{r} = \sin\theta, \quad \frac{x - x_1}{r} = \cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

குறிப்பு : 1. x-அச்சுக்கு இணையான (parallel) ஒரு கோடு y-அச்சை c தூரத்தில் வெட்டினால். அதன் சரிவு $m = 0$. மேலும் அது $(0, c)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுகிறது. எனவே அதன் சமன்பாடு $y - c = 0\,(x - 0)$.

அதாவது $y = c$

2. x-அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$

3. y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு, x-அச்சை k தூரத்தில் வெட்டினால், அதன் சரிவு $m = \infty$ மேலும் அது $(k, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது. சமன்பாடு (1)-ஐச் சிறிது மாற்றி எழுதினால்,

$$x - x_1 = \frac{1}{m}(y - y_1)$$

இங்கே $x_1 = k$, $m = \infty$, $y_1 = 0$

$\therefore \quad x - k = 0\,(y - 0)$

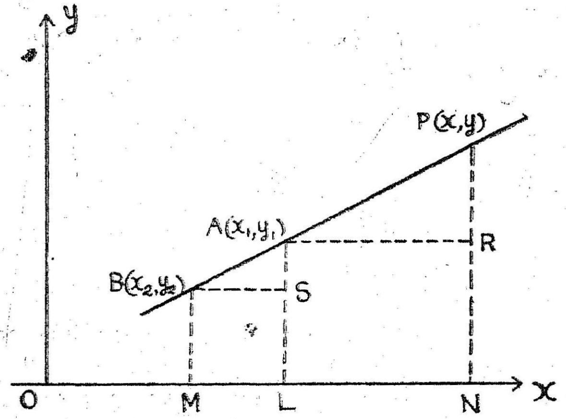
அதாவது $x = k$

4. y-அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$.

§ 12. கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு

கொடுத்துள்ள நேர்கோட்டின் மேல் $P(x, y)$ என்பது ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்போம். x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக AL, BM, PN வரைக. மேலும், AL, PN இவைகளுக்கு $\perp$ ஆக AR, BS

$$AR = x - x_1, \quad RP = y - y_1$$
$$BS = x_1 - x_2, \quad SA = y_1 - y_2$$



படம் 24.

$\triangle\ ARP$, $\triangle\ BSA$ வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

$$\therefore \quad \frac{RP}{AR} = \frac{SA}{BS}$$

அதாவது, $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ... ... (1)

படம் (12)-ல் A, B களின் இடங்களை மாற்றி எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து (1)-ம், (2)-ம் ஒன்றே ஆகும் என்பது தெளிவாகிறது. (இவைகளைச் சுருக்கிப் பார்த்தாலும் உண்மை தெரிய வரும்.)

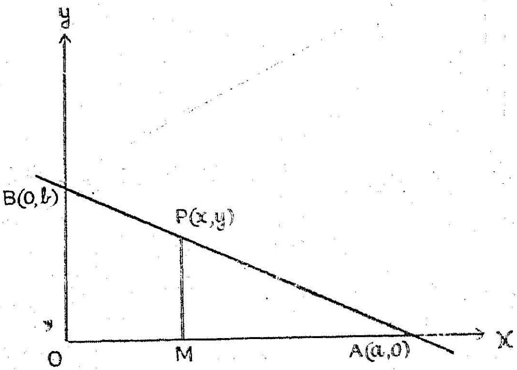
குறிப்பு: சமன்பாடு (1)-ஐயும், § 11-ல் உள்ள சமன்பாடு (1)-ஐயும் ஒப்பிட்டால்,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$ என்பது புலனாகும்.

அதாவது, இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சரிவு.

$$= \frac{y\text{ - ஆ. தொ. வித்தியாசம்}}{x\text{ - ஆ. தொ. வித்தியாசம்}}$$

§13. x-அச்சை a தூரத்திலும், y-அச்சை b தூரத்திலும் வெட்டும் நேர்கோடு



படம் 25.

$P(x, y)$ என்ற புள்ளி மேற்படி நேர்கோட்டில் இருக்கட்டும். x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக PM வரைக.

$\triangle AMP$, $\triangle AOB$ ஆகிய வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{MP}{OB} = \frac{MA}{OA}$$

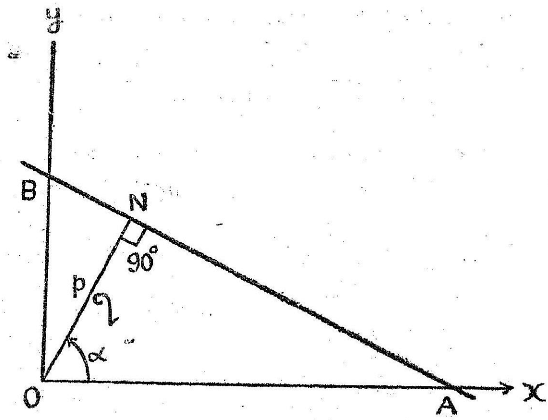
அதாவது $\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

§14. ஆதியிலிருந்து கொடுத்துள்ள ஒரு நேர்கோட்டிற்கு $\perp$ ஆக உள்ள செங்கோட்டின் நீளம் p. அந்த செங்கோடு x-அச்சிலிருந்து α கோணத்தில் உள்ளது என்றால், அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்

AB கொடுத்த நேர்கோடு, ON அதன் செங்கோடு என்போம்.

$\widehat{AON} = \alpha$. $ON \perp AB$.



படம் 26.

செங்கோண முக்கோணம் $\triangle$ AON-ல்

$$\frac{ON}{OB} = \cos \alpha \qquad \therefore \quad OA = \frac{p}{\cos \alpha}.$$

மேலும் $$\frac{ON}{OB} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha \qquad \therefore \quad OB = \frac{p}{\sin \alpha}$$

AB-யின் சமன்பாடு $$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \quad (\S\ 13)$$

அதாவது, $$\frac{x}{p/\cos \alpha} + \frac{y}{p/\sin \alpha} = 1$$

அதாவது, $$\underline{x \cos \alpha + y \sin \alpha = p}$$

இந்த சமன்பாட்டை "செங்கோட்டு வடிவம்" (normal form of the equation of a st. line) என்பர்.

§ 15. ஒரு நேர்கோட்டின் பொது வடிவம் (general form of the equation of a st. line)

இதுவரை ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை 5 வடிவங்களில் எழுதலாம் என்று பார்த்தோம். அவைகள் எல்லாம் x-லும், y-லும் ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பது தெளிவு. எனவே, ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம். $ax + by + c = 0$ ஆகும்.

மறுதலையாக (conversely) $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவத்தில் அமைந்த எந்த ஒருபடிச் சமன்பாடும் ஒரு நேர் கோட்டையே குறிக்கும். இதன் நிறுவலை ஒரு பயிற்சியாக மாணவர்களுக்கு விடப்பட்டுள்ளது.

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$ என மாற்றி எழுதினுல் சரிவு $= -\frac{a}{b}$ என்றும், y-வெட்டுத் துண்டு $= -\frac{c}{b}$ என்றும் பெறப்படும்.

ஆனுல், $\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$ என மாற்றி எழுதினுல் x-வெட்டுத் துண்டு $= -\frac{c}{a}$, y-வெட்டுத் துண்டு $= -\frac{c}{b}$ என்றும் அறியலாம்.

§ 16. இரண்டு கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி (Point of intersection of 2 st. lines)

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

என்ற இரு கோடுகள் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வெட்டினுல்,

$$ax_1 + bx_1 + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$a'x_1 + b'y_1 + c' = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

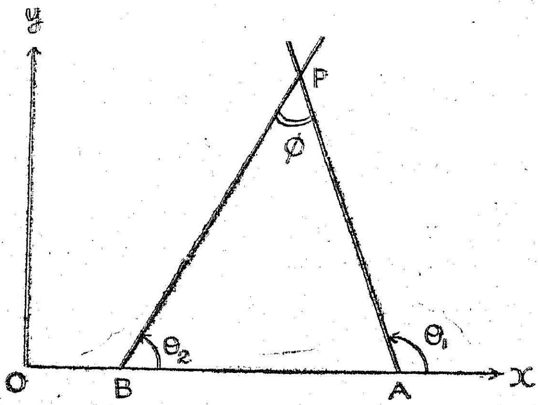
(x_1, y_1) காண்பதற்கு (1), (2) சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண வேண்டும். அதற்கு குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைக் (rule of cross multiplication) கையாள்வது எளிது.

$$\frac{x_1}{bc' - b'c} = \frac{y_1}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b}$$

எனவே வெட்டுப் புள்ளியின் ஆ. தொ.

$$\left(\frac{bc' - b'c}{ab - a'b}, \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}\right) \text{ ஆகும்.}$$

§ 17. இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையில் அமைந்த குறுங் கோணம் (Acute angle between two st. lines).



படம் 27.

கொடுத்துள்ள இரு நேர்கோடுகள் PA, PB என்போம். அவைகளின் சமன்பாடுகள் $y = m_1x + c_1$

$y = m_2x + c$ என்போம்.

அவைகள் P-யில் ϕ என்ற குறுங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொண்டு, x-அச்சை முறையே A, B-களில் θ_1, θ_2 கோணங்களில் வெட்டட்டும்.

படம் 27-லிருந்து $\phi = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \quad \tan\phi = \tan\ (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \qquad (\because\ m_1 = \tan\theta_1,\ m_2 = \tan\theta_2)$$

ϕ என்பது குறுங்கோணம் ஆகையால் $\tan\phi$, + மதிப்புடையது.

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

குறிப்பு: PA, PB இவைகளிக்கிடையே உள்ள விரிகோணம் $= \pi - \phi$.

துணை முடிவு (1)

PA, PB இணைகோடுகள் என்றால் $\phi = 0$ $\therefore \tan\phi = 0$.

$\therefore \quad m_1 = m_2$.

எனவே, இரண்டு கோடுகள் இணையாவதற்கான நிபந்தனை, அவைகளின் சரிவுகள் சமம் ஆகும்.

துணை முடிவு (2)

PA, PB செங்குத்துக்கோடுகள் என்றால், $\phi = 90^\circ$

$$\therefore \quad \tan\phi = \tan 90^\circ = \infty$$

அதாவது, $1 + m_1 m_2 = 0 \qquad \therefore \; m_1 m_2 = -1$

எனவே இரண்டு கோடுகள் செங்குத்து ஆவதற்கான நிபந்தனை, அவைகளின் சரிவுகளின் பெருக்கல் $= -1$ ஆகும்.

துணை முடிவு (3)

$$ax + by + c = 0$$

மற்றும் $a'x + b'y + c' = 0$ என்ற கோடுகள் இணை கோடுகள் என்றால், $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$

அதாவது, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$

அந்த கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகள் என்றால்,

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1 \text{ அதாவது, } aa' + bb' = 0$$

துணை முடிவு (4)

துணைமுடிவு (3)-லிருந்து $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணைகோடு $ax + by = \lambda$ ஆகும்.

(λ-என்பது c-யிலிருந்து மாறுபட்டது)

$ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோடு $bx - ay = \mu$ ஆகும்.

(μ என்பது c-யிலிருந்து மாறுபட்டது)

§ 18. கொடுத்துள்ள இரு நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு

கொடுத்துள்ள இரண்டு கோடுகள்

$$L \equiv ax + by + c = 0$$

$$L' \equiv a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{என்போம்.}$$

$$L + \lambda L' \equiv ax+by+c+\lambda (a'x+b'y+c') = 0 \quad \dots (A)$$

என்ற சமன்பாட்டை ஆராய்வோம்.

$L = 0$-வும், $L' = 0$-வும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வெட்டினுல் $L_1 \equiv ax_1 + by_1 + c = 0$

$$L_1 \equiv a'x + b'y + c' = 0$$

$\therefore$ λ எந்த மதிப்புடைய மாறிலி ஆனுலும்

$$L_1 + \lambda L_1' = 0$$

இதிலிருந்து (x_1, y_1) என்ற புள்ளி என்பதன்மேல் உள்ளது.

$$L + \lambda L' = 0$$

ஆனுல் $L + \lambda L' \equiv (a+\lambda a') x + (b+\lambda b') y + (c + \lambda c') = 0$ என்பது ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால், இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

எனவே $L = 0$, $L' = 0$ என்ற இருகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு

$$L + \lambda L' = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

§19·1. கொடுத்துள்ள ஒரு கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் (Length of the perpendicular from the origin on a given line)

கொடுத்த நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ ... (1)

என்போம். [படம் (26)-ஐப் பார்க்கவும்]

இதை $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ... ... (2)

என்ற வடிவத்தில் மாற்றியமைத்தால் p-யின் மதிப்பு நாம் விரும்பிய செங்குத்துத் தூரத்தைத் தரும்.

அதாவது (1)-ம் (2)-ம் ஒரே கோட்டைக் குறிக்கின்றன என்போம். அப்போது ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்கள் விகித சமத்தில் இருக்கும்.

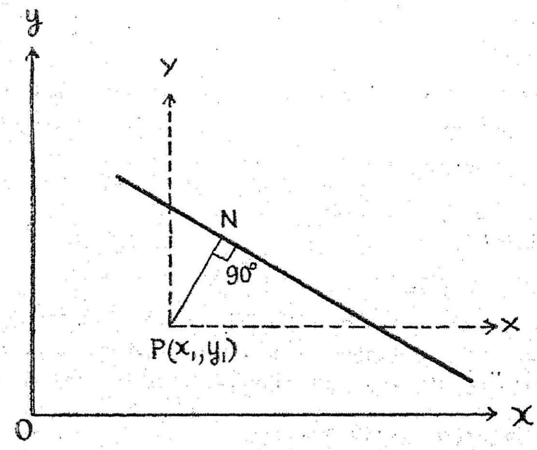
$$\therefore \quad \frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{-p}{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\therefore \quad P = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ஆனால் ஆதியிலிருந்து எந்த ஒரு நேர்கோட்டிற்கும் வரையப்பட்ட செங்குத்துத்தூரம் நேர்க்குறியுடையதாகக் கொள்வது மரபு எனவே $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் c நேர்க்குறியுடையதாக மாற்றி எழுதிக்கொள்ள வேண்டும். மேலும் $+\sqrt{a^2 + b^2}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore \quad \text{செங்குத்துத் தூரம்} = \vec{OM} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

§ 19·2 கொடுத்துள்ள நேர்கோட்டிற்கு $P\ (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரம்.



படம் 28.

கொடுத்துள்ள நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ ... (1)
என்போம். (c-யின் மதிப்பு + என்று வைத்துக் கொள்ளப் படுகிறது)

ஆதியை $P(x_1, y_1)$-க்கு மாற்றி, (X, Y)-யை நடப்பு ஆ. தொ.களாகக் கொண்டால்

$$x = x_1 + X, \ y = y_1 + Y$$

இதனால் சமன்பாடு (1), பின்வரும் வடிவம் பெறும்.

$$a(x_1 + X) + b(y_1 + Y) + c = 0$$

அதாவது $aX + bY + k = 0$ ... ... (2)

இங்கே $k = ax_1 + by_1 + c$ ... ... (3)

Pயிலிருந்து (1)-க்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்

= புதிய ஆதியிலிருந்து (2)-க்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$\therefore \quad PN = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\S\ 19 \cdot 1)$$

$$= \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\therefore$ P-யிலிருந்து செங்குத்துத் தூரம் $= \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

முக்கிய குறிப்பு :

$L \equiv ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் c நேர்க்குறி (+) உடைத்தாக இருக்கட்டும்.

ஆதியிலிருந்து $L = 0$-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $= \overrightarrow{OM}$ $= \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ நேர்க்குறியுடையது.

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியும் ஆதியும் $L = 0$ என்ற கோட்டிற்கு ஒரே புறத்தில் அமைந்தால் $\overrightarrow{PN}$-உடைய திசையும் $\overrightarrow{OM}$-உடைய திசையும் ஒன்றுதலால் $\overleftarrow{PN}$ நேர்க்குறியுடையது.

அதாவது $PN = + \dfrac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ஆனால் P-யும் ஆதியும் $L = 0$ என்ற கோட்டிற்கு எதிர்ப்புறங் களில் அமைந்தால், $\vec{PN}$ உடைய திசையும் $\vec{OM}$ உடைய திசையும் மாறுபடும். ஆதலால் $\vec{PN}$ எதிர்க்குறியுடையது.

$$\text{அதாவது } PN = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

துணை முடிவு :

மேலே கண்ட குறிப்பிலிருந்து P என்ற புள்ளியும் ஆதியும் $L = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் ஒரே புறத்தில் அல்லது எதிர்ப் புறங்களில் அமைந்துள்ளன என எளிதில் அறியலாம்.

P-யும் ஆதியும் $L = 0$ ஒரே புறத்தில் அல்லது எதிர்ப்புறங் களில் அமைந்தால்

முறையே $\vec{PN}$ நேர்க்குறி அல்லது எதிர்க்குறி உடையது

அதாவது முறையே $ax_1 + by_1 + c$ நேர்க்குறி அல்லது எதிர்க்குறி உடையது

அதாவது முறையே $L_1 \lessgtr 0$.

உதாரணமாக $5x - 7y - 19 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் எந்தப் பக்கத்தில் $(4, -3)$ என்ற புள்ளி அமைந்து இருக்கிறதென்ற காணவேண்டினுல். முதலில் கொடுத்த நேர்கோட்டுச் சமன் பாட்டைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதுக.

$$L \equiv -5x + 7y + 19 = 0$$

$x_1 = 4,\ y_1 = -3$ என்றுல்

$$L_1 = -5(4) + 7(-3) + 19 = -22 < 0$$

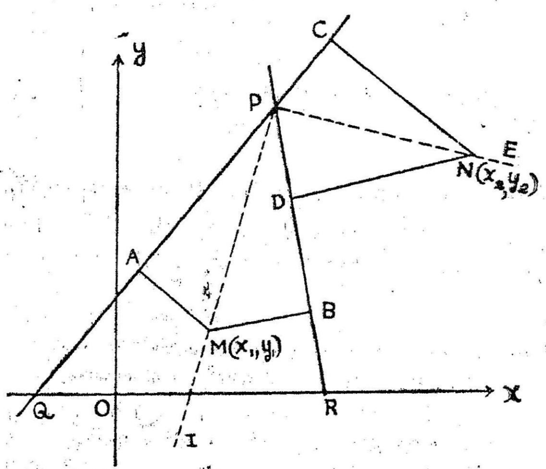
∴ ஆதியும் $(4, -3)$ என்ற புள்ளியும் எதிர்ப்பக்கங்களில் அமைந்துள்ளன.

ஆனுல் $x_2 = -3,\ y_2 = 4$ என்றுல்

$$L_2 = -5(-3) + 7(4) + 19 = +62 > 0$$

∴ ஆதியும் $(-3, 4)$ என்ற புள்ளியும் ஒரே பக்கத்தில் அமைந் துள்ளன.

§ 20. இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் (Bisectors of angles between 2 st. lines).



படம் 29.

கொடுத்துள்ள இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$ax + by + c = 0$ ... ... (1)

$a'x + b'y + c' = 0$ ... ... (2)

என்போம்.

இங்கே c, c'-ஆகியவைகள் நேர்க்குறி (+) உடையனவாக (1)-ம் (2)-ம் எழுதப்பட்டுள்ளன.

இந்த இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணங்கள் $Q\hat{P}R$, $R\hat{P}S$ என்போம்.

இவைகளில் ஆதியை அடக்கியுள்ள கோணம் $Q\hat{P}R$ (படம் 29).

மேற்கண்ட கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் முறையே PI, PE என்று இருக்கட்டும். $M(x_1, y_1)$ என்பது PI-ல் ஏதாவது ஒரு

புள்ளி. $N(x_2, y_2)$ என்பது PE-ல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. PQ, PR-களுக்கு ⊥ ஆக முறையே MA, MB வரைக. PR, PS-களுக்கு ⊥ ஆக முறையே NC, ND வரைக. ஆதியும் M-ம் PQ-க்கு ஒரே புறத்தில் உள்ளன. ஆதியும் M-ம் PR-க்கு ஒரே புறத்தில் உள்ளன. ஆகையால் MA-யும் MB-யும் நேர்க்குறியுடையன. மேலும், $MA = MB$.

$$\therefore \quad \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$\therefore$ M-ன் நியமப்பாதை, அதாவது, PI-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a'x + b'y + c}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

ஆதியும் N-ம் PQ-க்கு ஒரே புறத்தில் உள்ளன. ஆனால், ஆதியும் N-ம் PR-க்கு எதிர்ப்புறங்களில் உள்ளன.

$\therefore$ NC நேர்க்குறியும், ND எதிர்க்குறியும் உடையன. ஆனால் அளவில் $NC = ND$

$$\therefore \quad \frac{ax_2 + by_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{(a'x_2 + b'y_2 + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

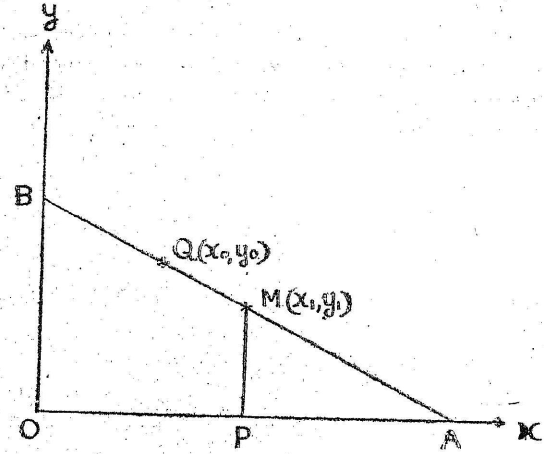
$\therefore$ $N(x_2, y_2)$-ன் நியமப்பாதை (அதாவது) PE-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{(a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (B)$$

(A)-யும், (B)-யும் நாம் விரும்பிய இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடுகளாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

ஒரு நேர்கோடு (x_0, y_0) என்ற நிலைப்புள்ளி வழியாகச் சென்று, x—, y—அச்சுகளை முறையே A, B-களில் வெட்டுகிறது. M என்பது AB-யின் நடுப்புள்ளி என்றால், M-ன் நியமப்பாதை $\frac{x_0}{2x} + \frac{y_0}{2y} = 1$ என்று காண்பிக்கவும்.



படம் 30.

M-ன் ஆ. தொ. $(x_1\ y_1)$ என்போம்.

x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக MP வரைக.

பின்பு $OP = x_1 \quad \therefore \quad OA = 2x_1$

$PM = y_1 \quad \therefore \quad OB = 2y_1$

$\therefore$ AB-யின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{OA} + \dfrac{y}{OB} = 1$ ஆகும்.

அதாவது $\dfrac{x}{2x_1} + \dfrac{y}{2y_1} = 1$

இந்தக்கோடு $Q\ (x_0, y_0)$ வழியாகச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{x_0}{2x_1} + \frac{y_0}{2y_1} = 1$$

$\therefore$ $M\ (x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை (கீழ்க்குறி 1-ஐ நீக்கிஞல்)

$$\frac{x_0}{2x} + \frac{y_0}{2y} = 1$$

மாதிரிக் கணக்கு 2 :

$3x+4y-2=0$, $x-2y+5=0$ என்ற இருகோடுகளுக்கிடையே உள்ள குறுங்கோணம் எவ்வளவு? மேற்படி இரு கோடுகளின் சந்திப்பையும் (1, 1) என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

$$3x+4y-2=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$x-2y+5=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$(1)\text{-ன் சரிவு} = -\frac{3}{4}; \quad (2)\text{-ன் சரிவு} = \frac{1}{2}$$

(1)-க்கும் (2)-க்கும் இடையே உள்ள குறுங்கோணம் ϕ என்றால்

$$\tan\phi = \left|\frac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{3}{8}}\right| = 2$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1} 2$$

(1)-ம் (2)-ம் வெட்டும் புள்ளிகாண அவைகளுடைய தீர்வு காண வேண்டும். அப்படிச் செய்தால்,

$$\frac{x}{20-4} = \frac{y}{-2-15} = \frac{1}{-6-4}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{8}{5}, \quad y = \frac{17}{10} \text{ ஆகும்.}$$

$(1, 1)$, $\left(-\frac{8}{5}, \frac{17}{10}\right)$ ஆகிய 2 புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{\frac{17}{10}-1}{-\frac{8}{5}-1} = \frac{7}{-26}$$

$$\therefore \quad \text{நமக்கு வேண்டிய கோடு } 7x+26y-33=0$$

மாற்று வழி :

§ 18-ஐப் பயன்படுத்தினால், (1), (2) இவைகள் வெட்டும் புள்ளியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு

$$3x+4y-2+\lambda(x-2y+5) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

ஆகும்.

இது $(1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால்,

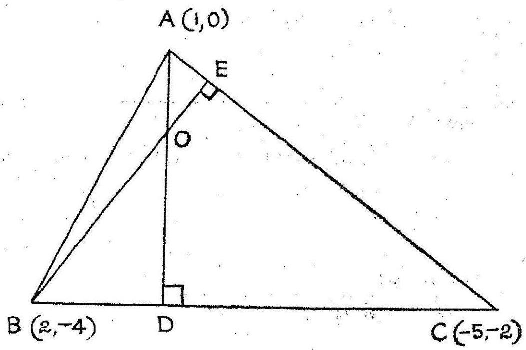
$$3 + 4 - 2 + \lambda (1-2+5) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{5}{4}$$

இதை (3)-ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கினால் நாம் விரும்பிய நேர் கோடு $7x + 26y - 33 = 0$ கிடைக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$(1, 0)$, $(2, -4)$, $(-5, -2)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக உள்ள முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் (ortho centre) காண்க. ((B. E. '65)



படம் 31.

கொடுத்துள்ள புள்ளிகளை முறையே A, B, C என்போம்.

BC-யின் சரிவு $= \dfrac{-2+4}{-5-2} = \dfrac{2}{-7}$

$AD \perp BC$ என்றால் AD-யின் சரிவு $= \dfrac{7}{2}$

CA-யின் சரிவு $= \dfrac{-2-0}{-5-1} = \dfrac{1}{3}$

$BE \perp CA$ என்றால் BE-யின் சரிவு $= -3$

$\therefore$ AD-யின் சமன்பாடு $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ ... (1)

BE-யின் சமன்பாடு $y + 4 = -3(x-2)$ ... (2)

இவைகளுடைய தீர்வு காணில்

$$x = \frac{11}{13},\quad y = \frac{-7}{13}$$

எனவே செங்குத்து மையம் $O\left(\frac{11}{13}, \frac{-7}{13}\right)$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

p, p' என்பவை ஆதியிலிருந்து முறையே

$$x \sec\theta + y \operatorname{cosec} \theta = a,\quad x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$$

ஆகிய நேர்கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரங்கள் என்றால், $4p^2 + p'^2 = a^2$ என நிறுவுக.

$$p = \frac{a}{\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}}} = a \sin\theta \cos\theta$$

அதாவது $p = \frac{1}{2} a \sin 2\theta$

மேலும் $p' = \frac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a \cos 2\theta$

$$\therefore\quad 4p^2 + (p')^2 = a^2 \sin^2 2\theta + a^2 \cos^2 2\theta = a^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$ax + by + c = 0,\ ax + by + c' = 0$

என்ற இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் காண்க.

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$ax + by + c' = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

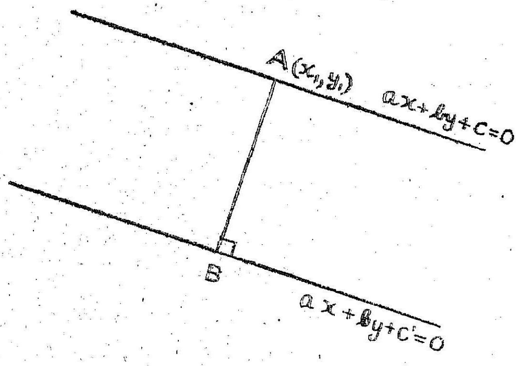
$A(x_1, y_1)$ என்பது (1)-ல் ஒரு புள்ளி என்போம்.

$$\therefore\quad ax_1\ by_1 + c = 0$$

அல்லது $ax_1 + by_1 = -c \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

AB என்பது (2)-க்கு ⊥ என்ருல்,

$$AB = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$



படம் 32.

ஆனல் (3)-லிருந்து $ax_1 + by_1 = -c$

$$\therefore \quad AB = \left|\frac{-c + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{c - c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$$2x - y = 1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$11x + 2y + 32 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$x + 2y = 8 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளாகும். அந்த முக்கோணத்தின் உள்மையம் (incentre) காண்க.

கொடுத்த சமன்பாடுகளைச் சிறிது மாற்றி எழுதினல்,

$$\frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1} = 1$$

$$\frac{x}{-32/11} + \frac{y}{-16} = 1$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

ஆகும்.

இவைகளிலிருந்து முக்கோணத்திற்குள் ஆதி அமைகிறது.

I என்பது உள் மையம் என்றால், அது AI, BI என்ற இரு உள் இரு சமவெட்டிகளின் சந்திப்பு ஆகும். எனவே, I-ன் ஆ. தொ. காண்பதற்கு முதலில் AI, BI-களின் சமன்பாடு காணவேண்டும். பின்பு அவைகளின் தீர்வு காண வேண்டும்.

AI என்பது (2), (3) கோடுகள் அடங்கிய கோணத்தின் உள் இரு சமவெட்டி என்றால்,

AI-ன் சமன்பாடு

$$\frac{11x + 2y + 32}{\sqrt{11^2 + 2^2}} = \frac{-x - 2y + 8}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

அதாவது $$\frac{11x + 2y + 32}{5\sqrt{5}} = \frac{-x - 2y + 8}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad 16x + 12y - 8 = 0$$

அல்லது $4x + 3y - 2 = 0$ ... ... (4)

BI என்பது (1), (2) கோடுகள் அடங்கிய கோணத்தின் உள் இரு சமவெட்டி என்றால் BI-ன் சமன்பாடு

$$\frac{-2x + y + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{11x + 2y + 32}{\sqrt{11^2 + 2^2}}$$

அதாவது $$\frac{-2x + y + 1}{\sqrt{5}} = \frac{11x + 2y + 32}{5\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad 21x - 3y + 27 = 0$$

அல்லது $7x - y + 9 = 0$ ... ... (5)

உள் மையம் என்பது (4), (5) ஆகிய கோடுகளின் சந்திப்பு ஆகும். எனவே (4), (5) இவற்றின் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$7x - y + 9 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

$$4x + 3y - 2 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

$$(5) \times 3\,;\ 21x - 3y + 27 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6)$$

$$(4) + (6)\,;\ 25x + 27 = 0$$

$$\therefore \quad x = -1$$

மேலும் $-4 + 3y - 2 = 0$

$$3y = 6$$

$$\therefore \quad y = 1$$

$\therefore$ உள் மையம் $(-1, 2)$

பயிற்சி 2.

1. y-அச்சை -2 அலகு தூரத்தில் வெட்டி x-அச்சிலிருந்து $135°$ கோணத்தில் அமைந்துள்ள நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

2. $(-3, 4)$, $(1, 6)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

3. $(a \cos \theta,\ b \sin \theta)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று $-\dfrac{b}{a} \cot \theta$-வை சாய்வாக உடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

4. $(1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று, x, y அச்சுகளை சம தூரத்தில் வெட்டும் நேர் கோடு எது ?

5. $(-4, -5)$, $(1, -1)$, $(6, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்று காண்பிக்கவும். அதன் சமன்பாடு யாது ?

6. ஒரு நேர் கோடு x, y அச்சுகளை முறையே a, b என்ற தூரங்களில் வெட்டுகிறது. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = k$ ஆனால், அந்தக் கோடு $\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது என்று நிறுவுக.

7. $(2, 5)$, $(3, -3)$, $(-1, -4)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகளைக் (medians) காண்க. அதன் ஈர்ப்பு மையத்தையும் காண்க.

8. $4x + 3y = 5$, $x + 2y = 0$ ஆகிய இரு கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும் $(3, 5)$ என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோடு யாது ?

9. $3x - y = 5$, $x + 3y = 1$ என்ற கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாகச் சென்று x, y அச்சுகளை சம தூரத்தில் வெட்டும் கோடு யாது ?

10. $3x + 4y - 6 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$ என்பவைகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் சென்று $2x + y + 1 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

11. மேற்கண்ட கணக்கில் $2x + y + 1 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக செல்லும் நேர்கோடு காண்க.

12. $(1, 1)$, $(2, -2)$, $(-1, 0)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் காண்க.

13. $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று மையம் (circumceutre) யாது ?

14. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $x + by = l^2$, $x + my = m^2$, $x + ny = n^2$ என்றால், அதன் செங்குத்து மையம் காண்க. (B. Tech. '69)

15. $(3, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று $3x + 4y = 1$ என்ற கோட்டை $45°$ கோணத்தில் வெட்டும் நேர்கோடுகள் ஏவை ?

16. ஒரு சாய் சதுரத்தின் (rhombus) ஒரு மூலை விட்டத்தின் (diagonal) முனைகள் (ends) $(a, 0)$, $(0, 2a)$ மேலும் ஒரு பக்கம் $4(x - a) = 3y$ என்றால் மற்ற பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் யாவை ?

17. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஈர்ப்பு மையம் ஆதியாகும். அதன் ஒரு பக்கம் $x + y = 1$ என்றால் மற்ற பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

18. $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2$ என்றால்

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by + c' = 0$$

$$a'x + b'y + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

என்ற நான்கு கோடுகளால் உண்டாகும் இணைகரத்தின் (parallelogram) மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று 90° கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும் என்று நிறுவுக.

19. $x + 2y - 5 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ ஆகிய இரு இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவு?

20. $3x + 4y = 5$, $12x - 5y = 41$ ஆகிய இரு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களை இரு சம கூறுக்கும் கோடுகள் யாவை?

21. $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ ஆகிய கோடுகளைப் பக்கங்களாக உடைய முக்கோணத்தின் உள் மையம் எது?

விடைகள்

1. $y + x + 2 = 0$ 2. $x - 2y + 11 = 0$

3. $\frac{x}{a} \cos\theta + \frac{y}{b} \sin\theta = 1$ 4. $x + y = 2$

5. $4x - 5y = 9$ 7. $2y = 17x - 24$, $5y = 6 - 7x$, $7y = 10x - 18$, ஈர்ப்பு மையம் $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

8. $6x - y - 13 = 0$ 9. $5x + 5y = 7$

10. $13x - 26y + 29 = 0$ 11. $52x + 26y - 51 = 0$

12. $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ 13. $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

14. $\{1, (l+m+n+lmn)\}$ 15. $x - 7y + 4 = 0$, $7x + y = 22$

16. $4x - 3y + 6a = 0$, $y = 2a$, $y = 0$

17. $y = x(2+\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3}$.

$y = x(2-\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3}$

19. $\frac{6}{\sqrt{5}}$ 20. $11x + 3y = 30$, $3x - 11y = 20$

21. $(10, 0)$

துணை அதிகாரம் 3.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள்
(Two or more straight lines)

§ 21. $L \equiv ax+by+c=0$, $L' \equiv a'x b'y+c'=0$ என்பவை இரண்டு கோடுகளைத் தனித்தனியாகக் குறித்தால், $LL' \equiv (ax+by+c)(a'x+b'y+c') = 0$ என்பது மேற்கண்ட இரண்டு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு (combined equation) ஆகும்

$P(x_1\, y_1)$ என்ற புள்ளி $L = 0$ என்ற கோட்டின் மேலோ அல்லது $L' = 0$ என்ற கோட்டின் மேலோ இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

இதனால் $L_1 \equiv ax_1 + by_1 + c = 0$

அல்லது $L_1' \equiv a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$

எனவே எப்போதும் $L_1 \cdot L'_1 = 0$

இதிலிருந்து $P(x_1\, y_1)$ என்ற புள்ளி $LL' = 0$ என்பதன் மேல் இருக்கிறது என்று தெளிவாகிறது.

எனவே $LL' = 0$ என்பது $L = 0$, $L' = 0$ என்ற இருகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$LL' = 0$ என்பதை விரித்து எழுதினால்

$$aa'x^2 + (ab' + a'b)xy + bb'y^2 + (ac' + a'c)x + (bc' + b'c)y + cc' = 0$$

அல்லது $Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$ என்ற வடிவம் உடைய இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

இதிலிருந்து x, y-களில் பொது இருபடிச் சமன்பாடு (general equation of 2nd degree in x and y) இரண்டு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் என்று பெறப்படுகிறது.

ஆனால் எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளும் இரு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடுகள்தாம் என முடிவுகட்ட வேண்டாம். அதற்குச் சில நிபந்தனைகள் வேண்டும் என்று பின்பு காண்போம்.

§ 22. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடு (homogeneous equation of second degree) ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடாகும்.

முடிந்தால் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது ஆதி வழியாகச் செல்லும் $y - m_1x = 0$. $y - m_2x = 0$ என்ற இரு கோடுகளைக் குறிக்கட்டும்.

$\therefore$ $ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv b\ (y-m_1x)\ (y-m_2x)$ ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்களை ஒப்பிட்டால்,

$$2h = -b\,(m_1m_2); \quad a = b\,m_1m_2$$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}; \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

மேலும், $m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4\,m_1m_2}$

$$= \sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}$$

$$= \frac{2}{b}\sqrt{h^2 - ab}$$

$$\therefore \quad m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}, \quad m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

எனவே, $h^2 > ab$ என்றால், m_1, m_2 களுக்கு மெய் மதிப்புகள் (real values) கிடைக்கும். அப்போது $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$h^2 < ab$ என்றால் ஆதிவழியாகச் செல்லும் இரண்டு கற்பனைக் கோடுகள் கிடைக்கும்.

எனவே, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடு எப்போதும், ஆதிவழியாகச் செல்லும் இரு (உண்மையான அல்லது கற்பனையான) கோடுகளைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு : இதே கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, n படியுள்ள சமபடிச் சமன்பாடு ஆதிவழியாகச் செல்லும் n கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு ஆகும் என அறியலாம்.

§ 23. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\,2fy + c = 0$ ... (1)

என்ற இருபடி பொதுச் சமன்பாடு இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ ஆகும்.

சமன்பாடு (1) இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதாக இருந்தால் அவை $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

ஆதியை P-க்கு மாற்றி (X, Y)-களை நடப்பு ஆ. தொ.-களாகக் கொள்க.

பின்பு $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$

இதனால் சமன்பாடு (1) பின்வருமாறு மாறும்

$$a(x_1 + X)^2 + 2h(x_1 + X)(y_1 + Y) + b(y + Y)^2 + 2g(x_1 + X) + 2f(y_1 + Y) + c = 0$$

அதாவது $aX^2 + 2h\,XY + bY^2$

$$+ 2(ax_1 + hy_1 + g)X + 2(hx_1 + by_1 + f)Y + (ax_1 + 2hxy_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) புதிய ஆதி P வழியாகச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளைக் குறிக்கிறது. எனவே அது X, Y-களில் சமபடித்தானதாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே $ax_1 + hy_1 + g = 0$ ... (3)

$hx_1 + by_1 - f = 0$ ... (4)

$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ... (5)

(5)-ஐ வேறு விதமாக எழுதினால்

$$x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதில் (3), (4) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தினால்

$$gx_1 + fy_1 + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

என்று அமையும்.

(3), (4), (6) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1, y_1 ஆகியவற்றை விலக்கினால் (eliminate), நாம் விரும்பும் நிபந்தனை கிடைக்கும்.

அதற்காக முதலில் (3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1, y_1-களைக் குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் காண்க.

$$\frac{x_1}{hf - bg} = \frac{y_1}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \; y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

இதை (6)-ல் பிரதியிட்டால்

$$g\left\{\frac{hf - bg}{ab - h^2}\right\} + f\left\{\frac{gh - af}{ab - h^2}\right\} + c = 0$$

அல்லது $g(hf - bg) + f(gh - af) + c(ab - h^2) = 0$

எனவே சமன்பாடு (1) இரு கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

ஆகும்.

அந்த கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: நிபந்தனை (7)-உடன் $h^2 = ab$ என்றால், அந்த கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி ∞ ஆகும்.

அதாவது (1) இரு இணைகோடுகளைக் குறிக்கும்.

§ 24. $ax^{22} + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (A)$

என்பது இரு கோடுகளைக் குறித்தால், இதற்குப் பொருத்தமான சமபடிச் சமன்பாடாகிய

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (B)$$

என்ற ஆதிவழியாகச் செல்லும் இருகோடுகளும் (A) குறிக்கும் ஆதிவழியாகச் செல்லாத இருகோடுகளும் இணை (parallel) ஆகும்.

$$ax^2 + 2hny + by^2 \equiv b(y - m_1x)(y - m_2x)$$

என்றால்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$
$$\equiv b(y - m_1x - c_1)(y - m_2x - c_2)$$

என்பது தெளிவு.

ஆனால், $\left.\begin{array}{l} y - m_1x - c_1 \\ y - m_2x - c_2 \end{array}\right\}$

என்ற சோடி கோடுகள்

$$\left.\begin{array}{l} y - m_1x = 0 \\ y - m_2x = 0 \end{array}\right\}$$

என்ற சோடி கோடுகளுக்கு இணை

இதன் மூலம் நாம் கூறிய உண்மை நிறுவப்பெறுகிறது.

§ 25. $ax + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (A)$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள குறுங்கோணம்

§ 24-ல் கூறியபடி (A) குறிக்கும் கோடுகளும்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (B)$$

குறிக்கும் ஆதிவழியாகச் செல்லும் கோடுகளும் இணை. எனவே, இந்த இரு சோடிகளுக்கு இடையே உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும். ஆகையால் சமன்பாடு (B) குறிக்கும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் காண்பது போதுமானதாகும்.

(B) குறிக்கும் கோடுகள்

$y - m_1 x = 0$ மற்றும் $y - m_2 x = 0$ என்றால்,

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}, \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

$\therefore$ ϕ என்பது இவைகளுக்கிடையே உள்ள குறுங்கோணம் என்றால்,

$$\tan\phi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right|$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

துணை முடிவு :

(A) அல்லது (B) குறிக்கும் இருகோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டினால் $\varphi = 90°$

$$\therefore \quad \tan\varphi = \infty \qquad \therefore \quad a + b = 0$$

எனவே $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்ற நிபந்தனையோடு $a + b = 0$ என்ற நிபந்தனையும் சேர்ந்தால், (A) குறிக்கும் இரு கோடுகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

§ 26. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ... ... (B)

என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள்

(B) குறிக்கும் கோடுகள் $y - m_1 x = 0$ மற்றும் $y - m_2 x = 0$ என்போம்.

இங்கே $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$, $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$ ... (1)

§ 20-ல் விளக்கியபடி, மேற்படி இரு சமவெட்டிகளின் தனித் தனி சமன்பாடுகள்

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

மற்றும் $$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = -\frac{y - m_2^2}{\sqrt{1 + m_2 x}}$$

ஆகும்.

எனவே அவைகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} - \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right)\left(\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} - \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right) = 0$$

அதாவது $$\frac{(y - m_1 x)^2}{1 + m_1^2} - \frac{(y - m_2 x)^2}{1 + m_2^2} = 0$$

அதாவது $$(1 + m_2^2)(y^2 - 2m_1 xy + m_1^2 x^2) - (1 + m_1^2)(y^2 - 2m^2 xy + m_2^2 x^2) = 0$$

அதாவது $$y^2 - 2m_1 xy + m_1^2 x^2 - y^2 + 2m_2 xy - m_2^2 x^2 + m^2{}_2 y^2 - 2m_1 m_2^2 xy + m_1^2 m_2^2 x^2 - m_1 y^2 + 2m_1^2 m_2 xy - m_1^2 m_2^2 x^2 = 0$$

அதாவது

$$(m_1^2 - m_2^2)(x^2 - y^2) = 2xy(m_1 - m_2 + m_1 m_2^2 - m_1^2 m_2)$$

$$\therefore \quad (m_1 - m_2)(m_1 - m_2)(x^2 - y^2) = 2xy(m_1 - m_2)(1 - m_1 m_2)$$

$m_1 \neq m_2$ என்பதால் $m_1 - m_2$ ஆல் வகுக்கலாம்.

$$(m_1 + m_2)(x^2 - y^2) = 2xy(1 - m_1 m_2)$$

இதில் (1)-ஐப் பயன்படுத்துக

$$\frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{1 - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{-2h}{b}}$$

அதாவது $$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

§ 27. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .... (A)
என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகள்

(A) குறிக்கும் கோடுகள் $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

ஆதியை $P(x_1\ y_1)$-க்கு மாற்றி (X, Y) என்பதை நடப்பு ஆ. தொ.-களாகக் கொள்க.

பின்பு $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$

இதனால் (A) என்பது பின்வரும் வடிவம் பெறும்

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(புதிய ஆதி P வழியாகச் செல்வதால் சமன்பாடு (1)-ல் இருபடி உறுப்புகள் மாத்திரம் உண்டென்றறிக).

§ 26-ல் விளக்கியபடி (1) குறிக்கும் கோடுகளுக்கிடையே கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகள்

$$\frac{X^2 - Y^2}{a - b} = \frac{XY}{h}$$

இப்போது பழைய ஆதிக்கு மாற்றினால், நாம் விரும்பிய இரு சம வெட்டிகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

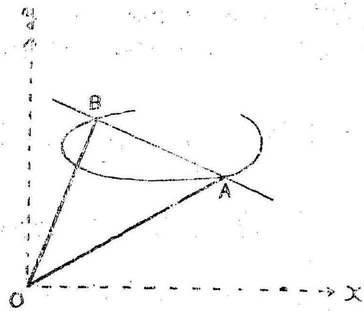
$$\frac{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2}{a - b} = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{h}$$

ஆகும்.

§ 28. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)
என்பது ஒரு கூம்பு வளைவை அல்லது இரு கோடுகளைக் குறிக்கட்டும். $lx + my + n = 0$ ... ... (2)

என்ற கோடு (1)-ஐ A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். O ஆதியானால் OA, OB என்ற கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண (1)-ஐ (2)-ன் உதவியுடன் சமபடித்தானதாக்க வேண்டும்.

சமன்பாடு (1) சமபடி இல்லாதது (non-homogeneous) என்பது வெளிப்படை. இதை (2)-ன் உதவியால் பின்வருமாறு சமபடித் தானதாகச் செய்யலாம்.



படம் 33.

(2)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$1 = \frac{lx + my}{-n} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2')$$

(1)-ஐயும் பின் வருமாறு எழுதலாம்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx \cdot 1 + 2fy \cdot 1 + c \cdot 1^2 = 0 \quad \ldots \quad (1')$$

(2′)-ஐ (1′)-ல் பயன்படுத்தினால்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\left(\frac{lx + my}{-n}\right)$$

$$+ 2fy\left(\frac{lx + my}{-n}\right) + c\left(\frac{lx - my}{-n}\right)^2 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3) சமபடித்தானது ஆதலால், அது ஆதிவழியாகச் செல்லும் இரு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மேலும், A அல்லது B-யின் ஆ. தொ. (x_1, y_1) என்றால் அது (1)-ஐயும், (2′)-ஐயும் ஏககாலத்தில் சமனடையச் செய்யும். சமன்பாடு (3) என்பது, (1′), (2′) ஆகியவற்றிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றதால், (x_1, y_1) என்பது (3)-ஐயும் சமனடையச் செய்யும். இதிலிருந்து (3) குறிக்கும் கோடுகள் A, B என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும். அதாவது சமன்பாடு (3) OA, OB என்ற கோடுகளைக் குறிக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ மற்றும் $y = x + c$ ஆகிய மூன்று கோடுகளால் ஆன முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{c\sqrt{h^2 - ab}}{a + b + 2h}$ என நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது

$y = m\ x,\ y = m_2 x$ என்ற ஆதி வழியாகச் செல்லும் OA, OB ஆகிய கோடுகள் என்போம்.

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}\ m_1 m_2 = \frac{a}{b} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$y = x + c$ என்ற கோடு AO, OB-களை A, B-களில் வெட்டட்டும்.

A-யின் ஆ. தொ. காண $y = m_1 x$, $y = x + c$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணவேண்டும். அப்படிச் செய்தால்

$$A\left[\frac{c}{m_1 - 1}, \frac{m_1 c}{m_1 - 1}\right] = [x_1, y_1] \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{இதேபோல் } B\left[\frac{c}{m_2 - 1}, \frac{m_2 c}{m_2 - 1}\right] = [x_2, y_2] \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \triangle\, OAB\text{-யின் பரப்பு} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_2 c^2}{(m_1 - 1)\, m_2 - 1)} - \frac{m_1 c^2}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}\right]$$

$$= \frac{c^2}{2}\left[\frac{m_2 - m_1}{1 - (m_1 + m_2) + m_1 m_2}\right]$$

$$= \frac{c_2}{2}\ \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4m_1 m_2}}{1 - (m_1 + m_2) + m_1 m_2}$$

$$= \frac{c^2}{2}\ \frac{\sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2} - \dfrac{4a}{b}}}{1 + \dfrac{2h}{b} + \dfrac{a}{b}}$$

$$= \frac{c^2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b + 2h}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$$ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3 = 0$$

என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் மூன்று கோடுகளில் இரண்டு செங்குத்தாக இருந்தால்,

$$a^2 + d^2 + ae + bd = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

கொடுத்த சமன்பாடு மூன்று படியுடைய சமபடித்தானது என்பதால் அது ஆதிவழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கும். அவைகள்,

$$y - m_r x = 0, \qquad r = 1, 2, 3$$

என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \equiv d(y-m_1x)(y-m_2x)(y-m_3x)$$

இதில் ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்களைச் சமன் படுத்துக.

$$m_1 + m_2 + m_3 = -\frac{c}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = \frac{b}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$m_1m_2m_3 = -\frac{a}{b} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$y = m_1x$, $y = m_2x$ என்ற இரு கோடுகள் செங்குத்தாக உள்ளன என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

பின்பு $m_1m_2 = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

(3), (4)-களிலிருந்து $m_3 = \frac{a}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

(1), (5)-களிலிருந்து $m_1 + m_2 = -\frac{c}{d} - \frac{a}{d} = -\left(\frac{c+a}{d}\right) \quad (6)$

(2)-ல் (4), (5), (6) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துக.

$$-1 + \frac{a}{d}\left(-\frac{a+c}{d}\right) = \frac{b}{d}$$

அதாவது $bd + d^2 + a^2 + ac = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

x-அச்சில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி A-யிலிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரு கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக AL, AM என்ற கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. LM என்ற கோடு x-அச்சிலிருந்து $\tan^{-1}\left(\frac{b-a}{2h}\right)$ கோணத்தில் உள்ளது என்று காண்பிக்கவும்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது $y - m_1x = 0$ ... (1)

மற்றும் $y - m_2x = 0$ ... ... (2)

என்ற ஆதிவழியாகச் செல்லும் OL, OM என்னும் கோடுகளைக் குறிக்கட்டும் [படம் 34].

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}; \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

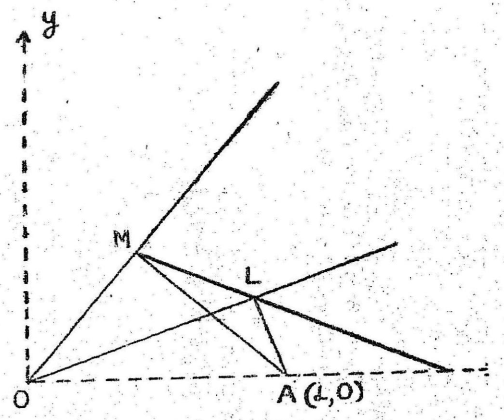
A-யின் ஆ. தொ. $(\alpha, 0)$ என்போம். AL என்ற கோடு (1)-க்குச் செங்குத்தாக $A\ (\alpha, 0)$ வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே, அதன் சமன்பாடு,

$$y = -\frac{1}{m_1}(x - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.

இதேபோல் AM என்ற கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = -\frac{1}{m_2}(x - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$



படம் 34.

(1), (3)-களின் தீர்வுகாணில் L-ன் ஆ. தொ. கிடைக்கும்

$$\therefore \quad \left(m_1 + \frac{1}{m_1}\right) x = \frac{\alpha_1}{m_1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\alpha}{1 + m_1^2} \quad \text{மற்றும்} \quad y = \frac{\alpha m_1}{1 + m_1^2}$$

அதாவது $L\left[\frac{\alpha}{1+m_1^2}, \frac{\alpha m_1}{1+m_1^2}\right]$

இதேபோல் $M\left[\frac{\alpha}{1+m_2^2}, \frac{\alpha m_2}{1+m_2^2}\right]$ ஆகும்.

LM என்ற கோடு x-அச்சிலிருந்து ϕ கோணத்தில் இருந்தால் $\tan\phi = LM$-ன் சரிவு $= \frac{y\text{-ஆ. தொ. வித்தியாசம்}}{x\text{-ஆ. தொ. வித்தியாசம்}}$

$$\text{அதாவது} \quad \tan\phi = \frac{\frac{\alpha m_1}{1+m_1^2} - \frac{\alpha m_2}{1+m_2^2}}{\frac{\alpha}{1+m_1^2} - \frac{\alpha}{1+m_2^2}}$$

$$= \frac{m_1(1+m_2^2) - m_2(1+m_1^2)}{(1+m_2^2)-(1+m_1^2)}$$

$$= \frac{m_1 - m_2 + m_1 m_2 (m_2 - m_1)}{m_2^2 - m_1^2}$$

$$= \frac{m_1 m_2 - 1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\frac{a}{b} - 1}{-\frac{2h}{b}} = \frac{b-a}{2h}$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b-a}{2h}\right)$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$$x^2 + \lambda xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது இரண்டு கோடுகளைக் குறிக்கிறது என்றால் λ-வின் மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் அந்த நேர்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகளையும் காண்க.

இங்கே $a = 1,\ b = 1,\ h = \frac{\lambda}{2}$

$$g = -\frac{5}{2},\ f = -\frac{7}{2}\ c = 6$$

சமன்பாடு (1) இரு கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

அதாவது $1 \cdot 1 \cdot 6 + 2\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) - 1\left(-\frac{7}{2}\right)^2$

$$- 1\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0$$

அதாவது $6\lambda^2 - 35\lambda + 50 = 0$

அல்லது $(3\lambda - 10)(2\lambda - 5) = 0$

$\therefore \quad \lambda = \frac{10}{3}$ அல்லது $\frac{5}{2}$

வகை (1)

$$\lambda = \frac{10}{3}$$

சமன்பாடு (1)-ல் $\lambda = \frac{10}{3}$ என்று பிரதியிட்டால்

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 15x - 21y + 18 = 0 \quad \ldots \quad (A)$$

என்று கிடைக்கும்.

(A) இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதால் அதை இரண்டு ஒருபடி சமன்பாடுகளாகக் காரணிப்படுத்தி எழுத முடியும். அப்படிச் செய்தால் தனித்தனி கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(A)-யை உடனடியாகக் காரணிப்படுத்தல் அவ்வளவு எளிதன்று. முதலில் சமபடி உறுப்புகளைக் காரணிப்படுத்திய பின்பு முழுவதுமாகக் காரணிப்படுத்தல் வேண்டும்.

இப்போது $3x^2 + 10\,xy + 3y^2 = (x+3y)\,(3x+y)$

$$\therefore \quad 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 15x - 21y + 18$$
$$\equiv (x + 3y + k_1)\,(3x + y + k_2)$$

என்போம்.

ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்களை ஒப்பிடுக.

$$3k_1 + k_2 = -15$$
$$k_1 + 3k_2 = -21$$
$$k_1 k_2 = 18$$

இவைகளின் தீர்வு காணில் $k_1 = -3, \quad k_2 = -6$

$\therefore \quad \lambda = \frac{10}{3}$ என்றுகும் போது அந்த கோடுகளின் சமன் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 3 &= 0 \\ 3x + y - 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ஆகும்.

வகை (2)

$$\lambda = \frac{5}{2}$$

$\lambda = \frac{5}{2}$ என (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 10x - 14y + 12 = 0$$

ஆகும்.

வகை (1)-ல் விளக்கியபடி செய்தால்

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = (2x + y)(x + 2y)$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 10x - 14y + 12 \equiv (2x + y + l_1)(x + 2y + l_2)$$

என்போம்.

மேலும்,
$$l_1 + 2l_2 = -10$$
$$2l_1 + l_2 = -14$$
$$l_1 l_2 = -12$$

தீர்வு கண்டால், $l_1 = -6, \quad l_2 = -2$

$\therefore \quad = \lambda \frac{5}{2}$ என்றுதும்போது இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ x + 2y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5 :

$$2x^2 - 13xy - 7y^2 + x + 23y + \lambda = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது இரு கோடுகளைக் குறிக்கும் என்றால், λ-வின் மதிப்பு என்ன? அந்த கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் எவ்வளவு? மேலும், (1, 2) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று மேற்படி இரு

கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ள கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண்க. (B. Tech. '62)

இப்போது $2x^2 - 13xy - 7y^2 \equiv (2x + y)(x - 7y)$

$$\therefore \; 2x^2 - 13xy - 7y^2 + x + 23y + \lambda \equiv (2x+y+k_1)(x-7y+k_2)$$

என்போம்.

ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்களை ஒப்பிடுக.

$$k_1 + 2k_2 = 1$$

$$-7k_1 + k_2 = 23$$

$$k_1k_2 = \lambda$$

தீர்வு காணில், $k_1 = -3, \; k_2 = 2$

$$\therefore \; \lambda = -6$$

ஆகவே, (1) குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்

$$2x + y - 3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$x - 7y + 2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இவைகளுக்கு இடையே உள்ள குறுங்கோணம் ϕ என்றால்,

$$\tan\phi = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{\frac{169}{4} + 14}}{2-7}\right| \quad (a = 2, \; b = -7, \; 2h = -13)$$

$$= 3$$

$\therefore$ குறுங்கோணம் $\phi = \tan^{-1} 3$

(2), (3) ஆகியவற்றுக்கு இணைகோடுகள்

$$2x + y + l = 0$$

$$x + 7y + l' = 0$$

இவைகள் (1, 2) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால்

$$2 + 2 + l = 0 \quad \therefore \; l = -4$$

$$1 - 14 + l' = 0 \quad \therefore \; l' = 13$$

எனவே வேண்டிய கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$(2x + y - 4)(x - 7y + 13) = 0$$

ஆகும்.

அதாவது $2x^2 - 13xy - 7y^2 + 22x + 41y - 52 = 0.$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

(i) $h^2 = ab$ **(ii)** $af^2 = bg^2$ என்ற நிபந்தனையுடன் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது இரு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. மேலும் அந்த இணைகோடு களுக்கு இடையே உள்ள தூரம்,

$$2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}} \text{ அல்லது } 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

கொடுத்துள்ள இருபடிச் சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ மற்றும் $lx + my + n' = 0$ ஆகிய இரு இணைகோடுகளைக் குறிக்கிறது என்போம்.

பின்பு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

$$\equiv (lx\, my + n)(lx + my + n')$$

ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணங்களை ஒப்பிடுக.

$$l^2 = a \quad \ldots \quad (1) \qquad l(n + n') = 2g \quad \ldots \quad (4)$$

$$m^2 = b \quad \ldots \quad (2) \qquad m(n + n') = 2f \quad \ldots \quad (5)$$

$$ml = h \quad \ldots \quad (3) \qquad nn' = c$$

எனவே (1), (2), (3) ஆகியற்றிலிருந்து,

$h^2 = ab$ கிடைக்கும்.

மேலும் (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l}{m} = \frac{g}{f} \quad \therefore \quad l^2 f^2 = m^2 g^2$$

அதாவது $af^2 = by^2$

மேலும் $lx + my + n = 0$

$lx + my + n' = 0$

ஆகிய இருகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்,

$$= \frac{n \sim n'}{\sqrt{l^2 + m^2}} \qquad [\S\ 20 \text{ ம. கா. } (5)]$$

$$= \frac{\sqrt{(n + n')^2 - 4nn'}}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4g^2}{l^2} - 4c}}{\sqrt{a + b}} \text{ அல்லது } \frac{\sqrt{\frac{4f^2}{m^2} - 4c}}{\sqrt{a + b}}.$$

$$= 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}} \text{ அல்லது } 2\sqrt{\frac{f^2 bc}{b(a + b)}}$$

மாதிரிக் கணக்கு 7.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்பது ஆதியிலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ள இரு கோடுகளைக் குறித்தால்

$$f^4 - g^4 = (c\, bf^2 - ag^2) \text{ என நிறுவுக.}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்

$$lx + my + n = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

$$l'x + m'y + n' = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

என்போம்.

$$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$
$$\equiv (lx + my + n)(l'x + m'y + n')$$

$$\therefore \quad ll' = a,\ mm' = b,\ nn' + c$$

$$lm' + l'm = 2h,\ ln' + l'n = 2g,\ mn' + m'n = 2f$$

ஆதியிலிருந்து (1)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$= \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

இதேபோல் ஆதியிலிருந்து (2)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்,

$$= \frac{n'}{\sqrt{(l')^2 + (m')^2}}$$

எடுகோள்படி (by hypothesis)

$$\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2}} = \frac{n'}{\sqrt{(l')^2+(m')^2}}$$

$$\therefore \quad n^2[(l')^2+(m')^2] = (n')^2(l^2+m^2)$$

அதாவது $n^2(l')^2 - (n')^2 l^2 = m^2(n')^2 - (m')^2(n^2)$

$$\therefore \quad (nl'+n'l)(nl'-n'l) = (mn'+m'n)(mn'-m'n)$$

அதாவது $2g\sqrt{(nl'+n'l)^2 - 4nn'll'}$

$$= 2f\sqrt{(mn'+m'n)^2 - 4mm'nn'}$$

அதாவது, $2g\sqrt{4g^2-4ac} = 2f\sqrt{4f^2-4bc}$

$$\therefore \quad g^2(g^2-ac) = f^2(f^2-bc)$$

அல்லது, $g^4 - g^2ac = f^4 - f^2bc$

$$\therefore \quad c(bf^2-ag^2) = f^4 - g^4$$

மாதிரிக் கணக்கு 8.

$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 12x + 16y - 12 = 0$ என்பது இரு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என்று காண்பிக்கவும். அவைகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவு?

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 \equiv (3x-4y)^2$$

$$\therefore \quad 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 12x + 16y - 12$$
$$\equiv (3x-4y+k_1)(3x-4y+k_2)$$

இங்கே, $k_1 + k_2 = -4$

$$k_1 k_2 = -12$$

$$\therefore \quad k_1 - k_2 = \sqrt{(k_1+k_2)^2 - 4k_1k_2} = \sqrt{16+48} = 8$$

$$\therefore \quad k_1 = 2, \quad k_2 = -6$$

∴ கொடுத்துள்ள இருபடிச் சமன்பாடு பின்வரும் கோடுகளைக் குறிக்கின்றன.

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$3x - 4y - 6 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவைகள் இணைகோடுகள் என்பது வெளிப்படை

$A(x_1, y_1)$ என்பது (1)-ல் ஒரு புள்ளி என்போம்.

அதனால் $3x_1 - 4y_1 + 2 = 0$

அதாவது $3x_1 \ 4y_1 = -2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

A-யிலிருந்து (2)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$= \left| \frac{3x_1 - 4y_1 - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| \qquad [(3)\text{-ஐப் பயன்படுத்தினால்}]$$

$$= \frac{8}{5}$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

$$(a - b)(x^2 - y^2) + 4hxy = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$h(x^2 - y^2) = (a - b)\, xy \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்பவை இரு சோடி நேர்கோடுகள். (1)-ன் இடையில் உள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் (2) என்றும், (2)-ன் இடையில் உள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் (1) என்றும் நிறுவுக.

(1)-ஐ மாற்றி எழுதினால்

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1')$$

இங்கே $A = a - b,\ B = b - a,\ H = 2h$

ஆகவே (1′)-ன் இடையில் உள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள்

$$\frac{x^2 - y^2}{A - B} = \frac{xy}{H}$$

அதாவது $$\frac{x^2 - y^2}{(a - b) - (b - a)} = \frac{xy}{2h}$$

அதாவது $h(x^2 - y^2) = (a - b)xy$

இதுவே கொடுத்த சமன்பாடு (2) ஆகும்.

மேலும், கொடுத்த சமன்பாடு 2-ஐ மாற்றி எழுதினால்,

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 = 0 \quad \ldots \quad (2')$$

இங்கே, $\alpha = h, \quad \beta = -h, \quad \gamma = -\frac{1}{2}(a-b)$

எனவே, (2')-ன் இடையில் உள்ள கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள்,

$$\frac{x^2-y^2}{\alpha-\beta} = \frac{xy}{\gamma}$$

அதாவது, $\dfrac{x^2-y^2}{h-(-h)} = \dfrac{xy}{-\frac{1}{2}(a-b)}$

அல்லது, $\dfrac{x^2-y^2}{2h} = -\dfrac{2xy}{a-b}$

அதாவது, $(a-h)(x^2-y^2) + 4hxy = 0$

இது கொடுத்த சமன்பாடு (1) ஆகும். இத்துடன் நிறுவல் முற்று பெறுகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 10.

$$3x - y = 2 \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற கோடு

$$7x + 8y^2 - 4xy + 2x - 4y - 8 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற கூம்பு வளைவை (conic) A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ஆதி என்றால் OA, OB என்ற கோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டும் என காண்பிக்கவும்.

OA, OB-களின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண (2)-ஐ (1)-ன் உதவியால் சமபடித்தானதாக்க வேண்டும். அப்படிச் செய்தால்,

$$7x^2 + 8y^2 - 4xy + 2x\left(\frac{3x-y}{2}\right) - 4y\left(\frac{3x-y}{2}\right) - 8\left(\frac{3x-y}{2}\right)^2 = 0$$

என்று கிடைக்கும்.

$$8x^2 - 8y^2 - 13xy = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

என்றாகும்.

இந்தச் சமன்பாடு (3) OA, OB-களின் கூட்டுச் சமன்பாடு ஆகும்.

இங்கே x^2-களின் குணகம் + y^2-குணகம்

$$= 8 - 8 = 0$$

∴ OA-யும், OB-யும் செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

பயிற்சி 3.

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx + my + n = 0$ ஆகிய மூன்று கோடுகளால் ஆன முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{m^2\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

என நிறுவுக.

2. (α, β) என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax^2 + 2hxy + ly^2 = 0$ என்பதால் குறிக்கப்படும் இரு கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்கல் பலன்

$$\frac{a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது குறிக்கும் இரு கோடுகளில் ஒன்றின் சரிவு மற்றதன் சரிவின் இருமடங்காகும் என்றால் $8h^2 = 9ab$ என்று காண்பிக்கவும். (B. Tech. '69)

4. $12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ என்ற கோடுகளால் உண்டாகும் முக்கோணத்தின் ஈர்ப்பு மையம் (centroid) காண்க.

5. $x^2 - 4xy + y^2 = 0$, $x + y = 3$ என்ற கோடுகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தைக் கொடுக்கும் என நிறுவுக.

6. ஒரு இணைகரத்தின் இருபக்கங்கள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆகும். அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் $lx + my = 1$ என்றால் மற்றொரு மூலைவிட்டம் $y(bl - hm) = x(am - hl)$ என்று நிறுவுக

7. (h, k) என்ற புள்ளியிலிருந்து p தூரத்தில் இருக்கும் படியாகவும் ஆதி வழியாகவும் செல்லும் இருகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண்க. (B. E. '70)

8. கீழ் வரும் சமன்பாடுகள் இரண்டு கோடுகளைக் குறித்தால் λ-வின் மதிப்பு யாது ? அந்தக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும் அவைகளிடையே உள்ள குறுங்கோணத்தையும் காண்க.

(அ) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$

(ஆ) $x^2 - y^2 + x - 3y + \lambda = 0$

(இ) $2x^2 - 13xy - 7y^2 + 22x + 41y + \lambda = 0$ (B. E. '61)

(ஈ) $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 6x + 7y + \lambda = 0$ (B. E. '60)

(உ) $2x^2 - xv - y^2 + \lambda x + 7y + 8 = 0$

(ஊ) $12x^2 + 52xy + 35y^2 + 36x + 78y + \lambda = 0$

(எ) $8x^2 + 10xy + 3y^2 + 26x + 26y + \lambda = 0$

9. கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் இரு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என்று நிறுவிய பிறகு அவைகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்களைக் கணக்கிடுக.

(a) $x^2 + 2xy + y^2 + 5x + 5y - 14 = 0$

(b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 1 = 0$ (B. E. '62)

(c) $9x^2 - 6xy + y^2 + 18x - 6y + 8 = 0$ (B. Tech. '71)

(d) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y - 21 = 0$ (B. E. '63)

(e) $x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}\,y - 4 = 0$

(f) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$

10. $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$ என்பது குறிக்கும் கோடுகளுக்கு செங்குத்தாகவும் $(2, -1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதுமான இரு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண்க. (B. Tech. '72)

11. $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ என்ற ஆதி வழியாகச் செல்லும் கோடுகளுக்கு செங்குத்தாக $(2, 3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு சோடி கோடுகளின் சமன்பாடு யாது? (B. Tech. '68)

12. $2x^2 - xy - 6y^2 = 0$

$$2x^2 - xy - 6y^2 - 9x - 10y + 4 = 0$$

ஆகிய நான்கு கோடுகளும் சேர்ந்து ஒரு இணைகரம் ஆகும் என்று காண்பிக்கவும். அதன் பக்கங்களின் நீளங்களையும் காண்க.

13. $12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0$

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$$

என்ற நான்கு கோடுகள் ஒரு சதுரத்தைத் தரும் என்று காண்பிக்கவும். அதன் பக்கம் எவ்வளவு?

14. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது இரு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறித்தால் ஆதியிலிருந்து அவைகள் சந்திக்கும் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம்

$$\sqrt{\frac{f^2 + g^2}{b^2 + h^2}}$$

என நிறுவுக.

15. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது இரு கோடுகளைக் குறித்தால் ஆதியிலிருந்து அவைகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்கல் பலன்

$$\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்பது குறிக்கும் இரண்டு கோடுகள் $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என்பது குறிக்கும் இரண்டு கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

(B. Tech. '68)

17. $a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0$ என்ற இருகோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இருகோடுகளிலிருந்து சம கோணத்தில் உள்ளன என்று நிறுவுக (equally inclined).

18. $6(x-4)^2 - 13(x-4)(y-2) + 2(y-2)^2 = 0$ என்பது இருகோடுகளைக் குறிக்கிறது என நிறுவுக. மேற்படி கோடுகளும் $x = 8$ என்ற கோடும் சேர்ந்து உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க. (B. Tech. '72)

19. $kx + hy = 2hk$ என்ற கோடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = c^2$ என்ற வட்டத்தை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $h^2 + k^2 = c^2$ என்றால், OA, OB செங்குத்தாக உள்ளன என்று காண்பிக்கவும். ((B. E. '71)

20. $y = 3x + 2$ என்ற கோடு

$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$ என்ற வளை கோட்டை (conic) A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், **OA, OB** இவைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் எவ்வளவு? (B. E. '72, '57)

21. $7x^2 + 8xy - 7y^2 + 6x - 12y = 0$ மற்றும்

$2x + y - 1 = 0$ ஆகியவை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. மேற்படி புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைத்து வரும் கோடுகள் செங்குத்தாக உள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

22. $3x^2 + 5xy - 3y^2 + 2x + 3y = 0$ மற்றும்

$3x - 2y - 1 = 0$ ஆகியவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளையும் ஆதியையும் இணைக்கும் கோடுகள் செங்குத்தானவை என்று நிறுவுக. ((B. E. 63, '60)

23. $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ என்ற வட்டம் $x + 2y = 3$ என்ற கோட்டை P, Q-களில் வெட்டுகிறது. மேற்படி புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைத்துக் கிடைக்கும் கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகள் என்று நிறுவுக. (B. Tech. '69)

24. $3x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$, $2x + 3y - k = 0$ என்பவைகள் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் இரு கோடுகள் செங்குத்தாக இருந்தால்,

$6k^2 - 5k + 52 = 0$ என்று காண்பிக்கவும்.

25. $lx + my = 1$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதியையும் A, B

களையும் இணைத்த கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $45°$ என்றால்,

$$4\,[a^4\,(l^2 + m^2) - 1\,] = a^2\,(l^2 + m^2) - 2\,]^2$$

என்று நிறுவுக.

விடைகள்

4. $\left(\frac{8}{3} ; \frac{8}{3}\right)$ 7. $(k^2 - p^2)x^2 - 2hk\,xy + (h^2 - p^2)y^2 = 0$

8. (அ) $\lambda = 2, \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

(ஆ) $\lambda = -2, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), 90°$

(இ) $\lambda = -52, (1, 2), \tan^- 3^1$

(ஈ) $\lambda = 4, (1, -2) \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$

(உ) $\lambda = 17$ அல்லது -10

$\lambda = 17$ என்றால், $(-3, 5)\ \tan^{-1} 3$

$\lambda = -10$ என்றால், $(3, 2), \tan^{-1} 3$

(ஊ) $\lambda = 27, \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \tan^{-1}\left(\frac{32}{47}\right)$

(எ) $\lambda = -169, (-26, 39), \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$

9. (a) $\frac{9}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{13}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

(d) $2\sqrt{5}$ (e) $\frac{5}{2}$ (f) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

10. $5x^2 - 13xy - 6y^2 - 33x + 24y + 40 = 0$

11. $5x^2 + 8xy + 3y^2 - 44x - 34y + 95 = 0$

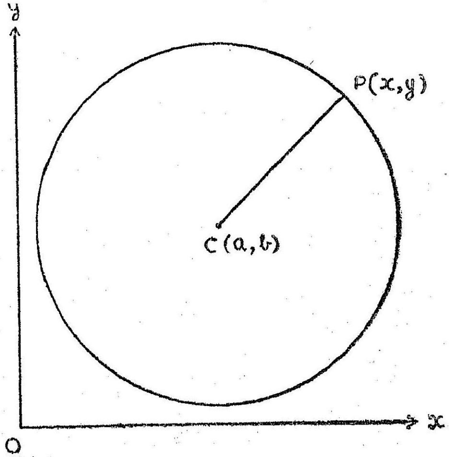
12. $\frac{\sqrt{5}}{7}, \frac{4\sqrt{13}}{7}$ 13. $\frac{1}{5}$

18. $\left(\frac{20}{3}, \frac{32}{3}\right)$ 20. $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

துணை அதிகாரம் 4.

வட்டம்
(Circle)

§ 29. மையம் (a, b), ஆரம் r உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு



படம் 35.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின்மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்போம். $C(a, b)$ மையம் என்றால்,

$$CP = r, \text{ அல்லது } CP^2 = r^2$$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

இதை வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு (general equation of a circle) என்பர்

துணை முடிவு

ஒரு வட்டத்தின் மையம் ஆதி, ஆரம் a என்றால் அதன் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ ஆகும்.}$$

§ 29·1. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **என்ற பொது இருபடிச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை**

§ 29-லிருந்து ஒரு வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2+b^2-r^2) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும்.

கொடுத்த சமன்பாடு,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கவேண்டுமானல் (1), (2) இவைகளின் ஒரே மாதிரியான உறுப்புகளின் குணகங்கள் விகித சமத்தில் இருக்கவேண்டும்.

எனவே.

$$\frac{a}{1} = \frac{2h}{0} = \frac{b}{1} = \frac{2g}{-2a} = \frac{2f}{-2b} = \frac{c}{a^2+b^2-r^2}$$

$\therefore \quad a = b$ மற்றும் $h = 0$

அதாவது, (i) x^2-ன் குணகம் = y^2-ன் குணகம்

(ii) xy-ன் குணகம் = 0

எனவே, $a(x^2+y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$

என்பது எப்போதும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

§ 30. ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம் (Standard equation of a circle)

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் x^2-ன் குணகம் = y^2-ன் குணகம் = 1

xy-ன் குணகம் = 0

எனவே இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

இதையே வட்டத்தின் நியம வடிவ சமன்பாடு என்பர்.

இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = (\sqrt{g^2+f^2-c^2})$$

இதிலிருந்து நியம வடிவத்தில் வட்டத்தின் சமன்பாடு இருந்தால்,

$$\text{மையம் } (-g,\ -f),\quad \text{ஆரம்} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

என்று தெளிவாகிறது.

துணை முடிவு :

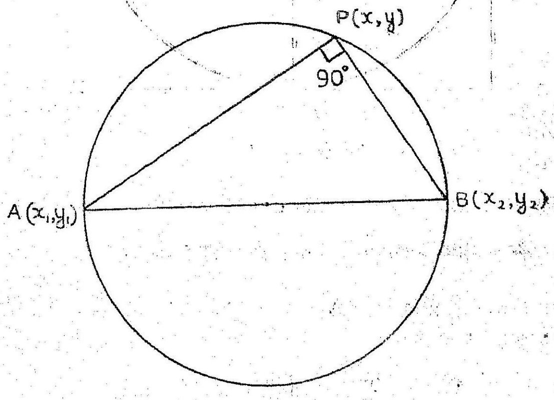
$$a(x^2+y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற வட்டத்தில்,

$$\text{மையம் } \left(-\frac{g}{a},\ -\frac{f}{a}\right),\quad \text{ஆரம்} = \sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$$

§ 31. கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகளை இணைத்த நேர் கோட்டை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்பவை கொடுத்துள்ள புள்ளிகள் என்போம்.



படம் 36.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின்மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்றால், $\widehat{APB} = 90°$

$\therefore$ AP-யின் சரிவு $\times$ BP-யின் சரிவு $= -1$

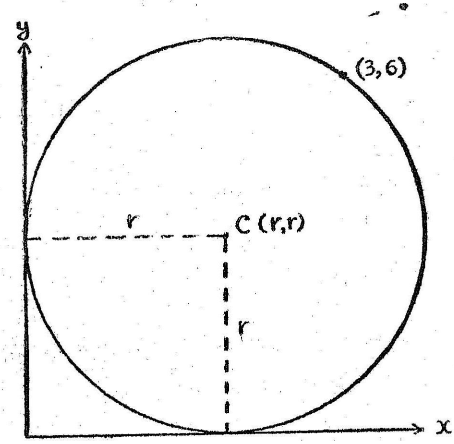
அதாவது $\left(\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\dfrac{y - y_2}{x - x_2}\right) = -1$

$$\therefore (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

இதுவே நாம் விரும்பிய சமன்பாடு ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

(3, 6) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று x, y அச்சுகளைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



படம் 37.

(3, 6) என்ற புள்ளி முதல் காற்பகுதியில் (first quadrant) உள்ளதால் மேற்படி வட்டங்களும் முதல் காற்பகுதியில்தான் இருக்கவேண்டும். (படம் 37.) மேலும், அந்த வட்டத்தின் ஆரம் r என்ருல், அதன் மையத்தின் ஆ. தொ. (r, r) என்று இருக்க வேண்டும்.

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

ஆனால் இது (3, 6) என்ற புள்ளிவழியாகச் செல்லுகிறது.

$$\therefore \quad (3 - r)^2 + (6 - r)^2 = r^2$$

$$\therefore \quad r^2 - 18r + 45 = 0$$

அதாவது $r = 3$ அல்லது 15

r-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைத்திருப்பதால் கொடுத்த நிபந்தனைகளுடன் இரண்டு வட்டங்கள் உண்டென்று தெரிகிறது.

அவையாவன,

$$(x - 3)^2 = (y - 3)^2 = 3^2$$

மற்றும் $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 15^2$

அதாவது, $x^2 - y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

மற்றும் $x^2 + y^2 - 30x - 30y + 225 = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$(1, -1)$, $(1, 4)$, $(4, -2)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்போம்.

இது கொடுத்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதால்

$$2g - 2f + c + 2 = 0$$

$$2g + 8f + c + 17 = 0$$

$$8g - 4f + c + 20 = 0$$

இவைகளின் தீர்வு கண்டால்,

$$g = -\frac{7}{2}, \; f = -\frac{3}{2}, \; c = 2$$

என கிடைக்கும்.

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y + 2 = 0$$

இதன் மையம் $(-g, -f)$ அதாவது $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ஆகும்.

ஆரம் $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ என்ற வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனைப்புள்ளி (4, 1) என்ருல் மற்ருெரு முனைப் புள்ளி எது ?

கொடுத்த புள்ளி $A(4, 1)$ என்போம். மற்ருெரு முனைப் புள்ளி $B(x_1, y_1)$ என்போம். வட்டத்தின் மையம் $C(1, -3)$, AB என்ற விட்டத்தை இரு சம கூறுக்குகிறது.

$$\frac{x_1 + 4}{2} = 1, \qquad \frac{y_1 + 1}{2} = -3$$

$$x_1 = -2, \qquad y_1 = -7$$

$\therefore$ விட்டத்தின் மற்ருெருமுனைப் புள்ளி $(-2, -7)$

§ 32. குறியீடுகள் (Notations)

எழுதுவதற்கும் நினைவில் கொள்வதற்கும் எளிதாக இருக்கும் பின்வரும் குறியீடுகளை இனி பயன்படுத்துவோம்.

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ என்பது ஒரு பொது இருபடிக் கோவை என்ருல்,

$$S_1 \equiv axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$

$$S_2 \equiv axx_2 + h(xy_2 + x_2y) + byy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c$$

$$S_{12} \equiv ax_1x_2 + h(x_1y_2 + x_2y_1) + by_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c \equiv S_{21}$$

$$S_{11} \equiv ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$S_{22} \equiv ax_2^2 + 2hx_2y_2 - by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c$$

மேலும், $L \equiv lx + my + n$ என்ருல்,

$$L_1 \equiv lx_1 + my_1 + n$$

$$L_2 \equiv lx_2 + my_2 + n$$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி $S = 0$ என்ற வளைகோட்டின்மேல் இருந்தால்

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

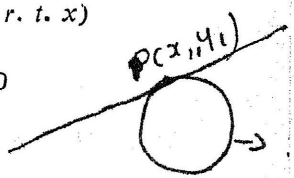
ஆகும். இதைச் சுருக்கமாக $S_{11} = 0$ என்று எழுதலாம்.

இதேபோல் $L = 0$ என்ற கோட்டில் (x_2, y_2) என்ற புள்ளி இருந்தால்

$L_2 = 0$ என்று எழுதலாம்.

§ 33. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் மேல் உள்ள $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடு கோடு [Tangent at the point $P(x_1, y_1)$]

$S = 0$ என்ற சமன்பாட்டை இருபக்கங்களிலும் x-ஐக் குறித்து வகையிடல் செய்தால் (differentiate) $S = 0$ *w. r. t. x*)



$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+g}{y+f}$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}$

$\therefore$ P-யில் தொடும் தொடுகோடு

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)(x - x_1)$$

$$yy_1 + fy - y_1^2 - fy_1 = -xx_1 - gx + x_1^2 + gx_1$$

அதாவது $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$
இருபக்கங்களிலும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்டுக.

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \quad \dots \quad (1)$$

ஆனால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி $S = 0$-ன் மேல் உள்ளது.

எனவே $x_1^2 + y_1^2 + 2gx + 2fy_1 + c = 0$

இதை (2)-ல் பயன்படுத்தினால்

$P(x_1, y_1)$-யில் தொடும் தொடுகோடு

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

அல்லது $S_1 = 0$ ஆகும்.

துணை முடிவு :

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தை (x_1, y_1)-ல் தொடும் தொடுகோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$ ஆகும்.

§ 34. $L \equiv lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை

$L = 0$ என்ற கோடு $S = 0$ என்ற வட்டத்தை $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடட்டும்.

ஆனால் $P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் தொடுகோடு

$$S_1 \equiv xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$L \equiv lx + my + n = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்பது கொடுத்த தொடுகோடு

$\therefore$ (1)-ம் (2)-ம் ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

ஆகையால் ஒரே மாதிரியான உறுப்புகளின் குணகங்கள் விகித சமத்தில் இருக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1}{l} = \frac{y_1}{m} = \frac{-a^2}{n}$$

$$\therefore \; x_1 = \frac{-a^2 l}{n}, \; y_1 = \frac{-a^2 m}{n}$$

இந்தத் தொடுபுள்ளி $L = 0$ என்ற கோட்டிலும் உள்ளது.

$$\therefore \quad l\left(\frac{-a^2 l}{n}\right) + m\left(\frac{-a^2 m}{n}\right) + n = 0$$

எனவே நாம் விரும்பிய நிபந்தனை

$$a^2 (l^2 + m^2) = n^2$$

மேலும் தொடுபுள்ளி $\left(\frac{-a^2 l}{n}, \frac{-a^2 m}{n}\right)$ ஆகும்.

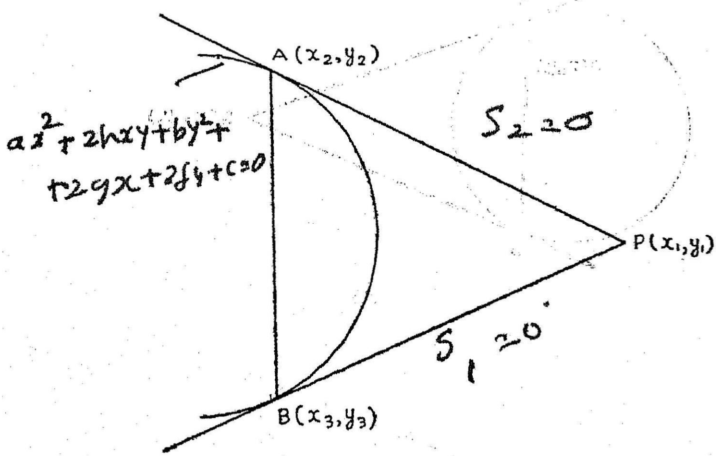
துணை முடிவு :

$y = mx + c$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை $c^2 = a^2 (1 + m^2)$.

மேலும் தொடுபுள்ளி $\left(\frac{-a^2 m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$

§ 35. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கூம்பு வளைவுக்கு (conic) வரையப்பட்ட தொடு நாண் [(chord of contact of tangents from the point $P(x_1, y_1)$]

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள் $S = 0$ என்பதை $A(x_2, y_2)$ $B(x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகளில் தொடட்டும்.



படம் 38.

AP என்ற தொடுகோடு $A(x_2, y_2)$-ல் தொடுவதால் அதன் சமன்பாடு $S_2 = 0$ ஆகும்.

அது $P(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்வதால் $S_{12} = 0$ ... (1)

இதேபோல் BP என்ற தொடுகோடு B-யில் தொடுகிறது.

மேலும் P வழியாகச் செல்வதால் $S_{13} = 0$ ... (2)

இப்போது $S_1 = 0$ ... ... (A)

என்பதை ஆராய்வோம்.

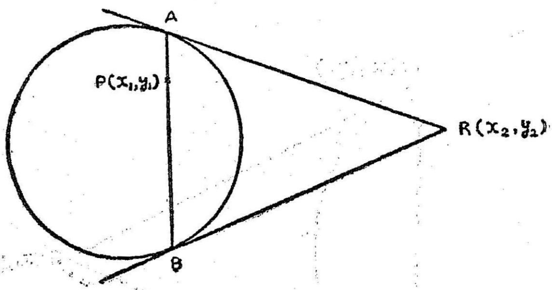
இது ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பதால் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். மேலும், (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து இது A, B ஆகிய புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கிறது என்பதும் தெளிவு.

எனவே $S_1 = 0$ என்பது AB என்ற நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

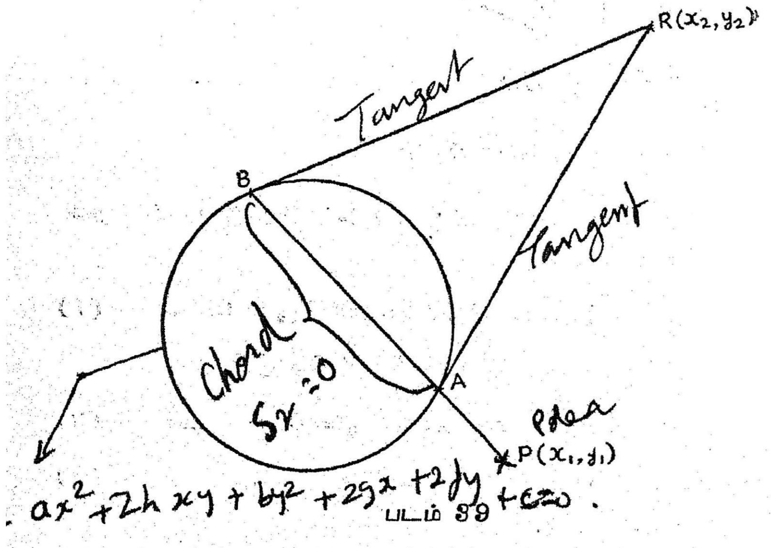
அதாவது $P(x_1, y_1)$-யின் தொடுநாண் $S_1 = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு : மேற்கூறிய நிறுவல் வட்டத்திற்கும் பொருந்தும்.

§ 36. இசைப்புள்ளியும் இசைக்கோடும் (Pole and polar)



படம் 38 (a)



படம் 39

வரைவிலக்கணம் (Definition) : P என்ற புள்ளி ஒரு வட்டத்தின் அல்லது ஒரு கூம்பு வளைவின் (conic) உள்ளேயோ அல்லது வெளியிலோ இருக்கட்டும். P வழியாக AB என்ற நாண் அந்த வட்டத்தை அல்லது கூம்பு வளைவை A, B என்ற புள்ளிகளில்

வெட்டட்டும். AB என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் R என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். R-ன் நியமப்பாதை P-யின் இசைக்கோடு (polar of P) எனப்படும் P என்ற புள்ளி இசைப் புள்ளி (pole) என்ற பெயர் பெறும்.

§ 37. $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கூம்பு வளைவைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு

$P(x_1, y_1)$-ன் வழியாகச் செல்லும் நாண் கூம்பு வளைவை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். A, B-களில் தொடும் தொடு கோடுகள் $R(x_2, y_2)$-ல் சந்திக்கட்டும். இதனால் AB என்பது R-ன் தொடு நாண் என்று தெளிவாகிறது. எனவே AB-யின் சமன்பாடு $S_2 = 0$ ஆகும்.

இது $P(x_1, y_1)$ வழியே செல்கிறது. $\therefore \quad S_{12} = 0$

அதாவது $ax_1x_2 + h(x_1y_2 + x_2y_1) + g(x_1 + x_2)$
$$+ f(y_1 + y_2) + c = 0$$

$\therefore \quad R(x_2, y_2)$-ன் நியமப்பாதை பெற கீழ்க்குறி (suffix) 2-ஐ நீக்கிவிடவேண்டும்.

$\therefore \quad R$-ன் நியமப்பாதை, அதாவது P-யின் இசைக்கோடு

$$axx_1 + h(xy_1 \; x_1y) + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

அதாவது $S_1 = 0$

tangent chord polar

முக்கிய குறிப்பு: தொடுகோடு, தொடு நாண், இசைக்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் $S_1 = 0$ என வருவதால் அவை மூன்றுக்கும் மிக நெருங்கிய தொடர்பு உண்டென்பது தெளிவு.

P என்ற புள்ளி கூம்பு வளைவின் வெளியே இருக்கும்போது அதன் இசைக்கோடும், தொடு நாணும் ஒன்றேதான்.

P என்ற புள்ளி கூம்பு வளைவின்மேல் இருந்தால் அதன் இசைக்கோடு, தொடுநாண், தொடுகோடு ஆகிய மூன்றும் ஒன்றே தான்.

P என்ற புள்ளி கூம்பு வளைவின் உள்ளே இருந்தால், அதற்கு உண்மையான தொடுகோடும் தொடுநாணும் இல்லை (கற்பனைத் தொடுகோடும், தொடுநாணும் உண்டு.) ஆனால் உண்மையான இசைக்கோடு உண்டு.

மேற்கூறியவை வட்டத்திற்கும் பொருந்தும் என்று அறிக.

§ 38. துணையியப் புள்ளிகள் (Conjugate points)

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற வட்டம் அல்லது கூம்பு வளைவைக் குறித்து ; $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால், Q-வின் இசைக்கோடு P-யின் வழியாகச் செல்லும்.

இம்மாதிரியான சோடிப் புள்ளிகளுக்கு துணையியப் புள்ளிகள் என்று பெயர்.

$P(x_1, y_1)$-ன் இசைக்கோடு $S_1 = 0$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழியாகச் செல்வதால் $S_{12} = 0$

ஆனால் $S_{12} = S_{21}$

இதிலிருந்து Q-வின் இசைக்கோடு P வழியாகச் செல்கிறது என்று பெறப்படுகிறது.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ துணையியப் புள்ளிகள் ஆவதற்கான நிபந்தனை $S_{12} = 0$ ஆகும்-

§ 39. மிக முக்கிய குறிப்பு

§ 35 முதல் § 38 வரையில் நாம் கூறியவை வட்டம், பரவளைவு (parabola), நீள்வட்டம் (Ellipse), அதிபரவளைவு (hyperbola) ஆகிய வளைகோடுகளுக்கும் (curves) பொருந்தும். ஆகையால்தான் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்ளாமல் பொது இருபடிச் சமன்பாடு எடுத்துக்கொண்டு விளக்கப் பட்டது. எனவே இனிவரும் துணை அதிகாரங்களில் இசைப் புள்ளி, இசைக்கோடு, தொடு நாண், துணையியப் புள்ளிகள் ஆகியவைகள், மேற்கூறிய வளைகோடுகளுக்குத் தனித்தனியாக விளக்கப்படமாட்டா.

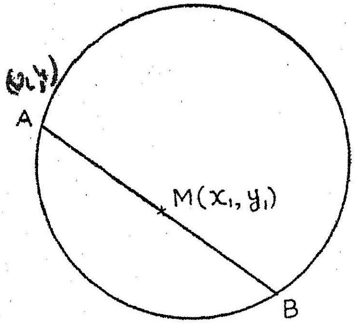
§ 40. $M(x_1, y_1)$-யை நடுப்புள்ளியாக உடைய வட்ட நாணின் சமன்பாடு

AB என்பது $M(x_1 \ y_1)$-யை நடுப்புள்ளியாக உடைய வட்ட நாண் என்போம். அதன் சரிவு $\tan\theta$ என்றால் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ \dots \ (2)$

(1)-ல் r என்பது $M(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y) என்ற புள்ளியின் வெக்டர் தூரம். எனவே AB-யில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$ என்று குறிக்கலாம்.



படம் 40.

இந்தப் புள்ளி A அல்லது B-யைக் குறித்தால் அந்த ஆ. தொ. (2)-ஐச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

அதாவது $(x_1 + r\cos\theta)^2 + (y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta)$
$+ 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0$

அதாவது $r^2 + 2r[(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta]$
$+ (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0$ ... (3)

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டில் r-ன் மூலங்கள் வெக்டர் $\vec{MA}$, $\vec{MB}$-களைக் குறிக்கும்.

ஆனால் $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$ (படம் 40)

எனவே (3)-ல் இரண்டு மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 0$

$\therefore$ r-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta = 0$

$\therefore \tan\theta = -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f} = AB$-யின் சரிவு

இதை (1)-ல் பயன்படுத்தினால்

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-(x_1+g)}{y_1 + f}$$

அதாவது $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

இருபக்கங்களிலும் $gx_1 + fy_1 + c$ என்பதைக் கூட்டுக.

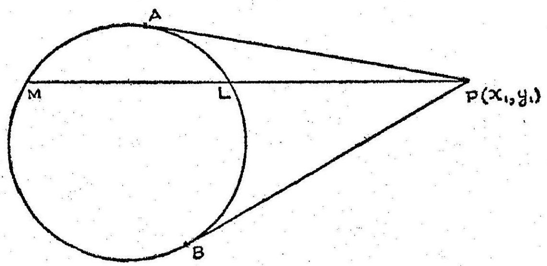
$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

எனவே $M(x_1, y_1)$-யை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$

§ 41. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)

என்ற வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ என்ற வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$P(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லும் எந்த ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் பின்வருமாறு எழுதலாம்.



படம் 41.

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad ... \quad ... \quad (2)$$

இதில் $\tan\theta$ என்பது அந்தக் கோட்டின் (உதாரணமாக PLM என்போம்) சரிவைக் குறிக்கும். r என்பது $P(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வெக்டர் தூரத்தைக் குறிக்கும்.

(2)-ல் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ எனக் குறிக்கலாம்.

இந்தப் புள்ளி வட்டத்தின்மேல் உள்ள L அல்லது M-ஆக இருந்தால், (1)-ஐச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

$$\text{அதாவது } (x_1 + r\cos\theta)^2 (y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0$$

$$\text{அதாவது } r^2 + 2r[(x_1+g)\cos\theta + (y_1+f)\sin\theta] + (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \quad \dots (3)$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் $\vec{PL}, \vec{PM}$-களைக் குறிக்கும். ஆனால் PLM என்பது PA அல்லது PB என்ற தொடு கோட்டோடு ஒன்றும் போது (coincident with the tangent)

$$\vec{PL} = \vec{PM} = \vec{PA} \text{ அல்லது } \vec{PB}$$

இப்படி ஆவதற்கான நிபந்தனை, சமன்பாடு (3)-ன் தன்மைகாட்டி (discriminant) = 0

$$\text{அதாவது } [(x_1+g)\cos\theta + (y_1+f)\sin\theta]^2 = S_{11} \quad \dots (4)$$

(4)-லிருந்து (2)-ன் சரிவாகிய $\tan\theta$-வைப் பெற்று (2)-ல் பிரதியிட்டு நாம் விரும்பும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காணலாம். அல்லது (2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து θ-வை நேரடியாக விலக்கிவிட்டும் (elimination of θ) நாம் விரும்பும் சமன்பாடு காணலாம். பிந்திய முறை எளிதாகையால் அதைக் கைக் கொள்வோம்.

∴ (2)-லிருந்து $\cos\theta$, $\sin\theta$ இவைகளின் மதிப்புகளை (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\left[(x_1+g)\left(\frac{x-x_1}{r}\right) + (y_1+f)\left(\frac{y-y_1}{r}\right)\right]^2 = S_{11}$$

இங்கே $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$

$$\text{எனவே } [(x_1+g)(x-x_1) + (y_1+f)(y-y_1)]^2 = S_{11}[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]$$

$$\text{அதாவது, } [xx_1 + yy_1 + gx + fy - x_1^2 - y_1^2 - gx_1 - fy_1]^2 = S_{11}[(x^2+y^2) - 2(xx_1+yy_1) + (x_1^2+y_1^2)]$$

அதாவது, $(S_1 - S_{11})^2 = S_{11}\,[S + S_{11} - 2\,S_1]$

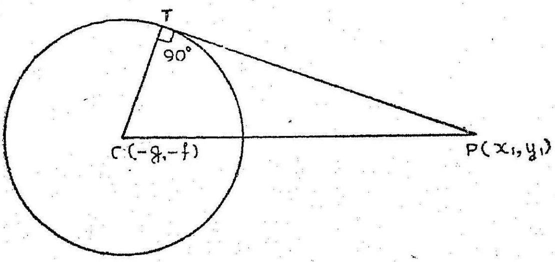
அதாவது, $S_1{}^2 - 2\,S_1\,S_{11} + S_{11}{}^2 = SS_{11} + S_{11}{}^2 - 2\,S_1\,S_{11}$

$\therefore$ தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $S_1{}^2 = SS_{11}$

§ 42. குறிப்பு :

§ 40, § 41, ஆகியவற்றில் கிடைத்துள்ள சூத்திரங்களை வட்டத்தைக் குறித்து அடைந்திருந்தாலும் அவைகளைப்பெற வட்டத்திற்கான எந்த சிறப்புப் பண்பையும் பயன்படுத்தவில்லை என்பதை நன்கு ஓர்க. எனவே, அந்த சூத்திரங்கள் எந்த ஒரு கூம்பு வளைவுக்கும் பொருந்தும் என்று புலனாகிறது. பொது இருபடிச் சமன்பாட்டைக் குறித்து தொடங்கியிருந்தாலும் அதே வடிவ வளைவுகளையே (results in the same form) பெற்றிருப்போம்.

§ 43. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ($P\,(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் நீளம்



படம் 42.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற வட்டத்தின் மையம் $(c\,(-g, -f)$, ஆரம் $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

PT என்பது தொடுகோட்டின் நீளம் என்றால்

$$PT^2 = CP^2 - CT^2$$
$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$
$$= x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$
$$= S_{11}$$

$$\therefore\ PT = \sqrt{S_{11}}$$

குறிப்பு : (1) $PT^2 \equiv S_{11}$ என்பதை $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின்படி (power of the point w. r. t. the circle) என்று கூறுவர் (படம் 42).

(2) P என்ற புள்ளி, வட்டத்தின்மேல் இருந்தால் $S_{11} = 0$, ஆகும். P என்பது வட்டத்திற்குள் இருந்தால் S_{11} எதிர்க்குறி (—) உடையதாகும் (அதாவது PT கற்பனை நீளமாகும்).

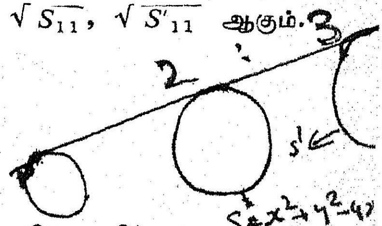
எனவே $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே, மேலே, அல்லது வெளியே இருப்பதற்கான நிபந்தனை முறையே $S_{11} \lesseqgtr 0$

*

மாதிரிக் கணக்கு 4.

P என்ற புள்ளியிலிருந்து $S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y - 3 = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 8x + 5y + 1 = 0$ என்ற இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், P-யின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என்றும் இந்த மூன்று வட்டங்களின் மையங்களும் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன என்றும் நிறுவுக.

$P(x_1, y_1)$ என்றால், கொடுத்த இரு வட்டங்களுக்கு வரைந்த தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $\sqrt{S_{11}}$, $\sqrt{S'_{11}}$ ஆகும்.



எடுகோள்படி, $\dfrac{\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S'_{11}}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \quad 9\,S_{11} = 3\,S'_{11}$

அதாவது $9(x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 8y_1 - 3)$
$= 3(x_1^2 + y_1^2 + 8x_1 + 5y_1 + 1)$

அதாவது $5(x_1^2 + y_1^2) - 68x_1 - 92y_1 - 31 = 0$

$\therefore$ P-யின் நியமப்பாதை,

$$x^2 + y^2 - \frac{68}{5}\,x - \frac{92}{5}\,y - \frac{31}{5} = 0$$

என்ற வட்டம் ஆகும்.

இதன் மையம் $c_3\left(\dfrac{34}{5}, \dfrac{46}{5}\right)$

கொடுத்த இரு வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே,

$$c_1\,(2,\,4),\quad c_2\left(-4,\,-\frac{5}{2}\right)\ \text{ஆகும்.}$$

c_1, c_2 இவைகளை இணைக்கும் கோடு,

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{4+\frac{5}{2}}{2+4}=\frac{13}{12}$$

அதாவது $13x-12y+22=0$ ... ... (1)

இதில் $c_3\left(\frac{34}{5},\ \frac{46}{5}\right)$-ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$13\left(\frac{34}{5}\right)-12\left(\frac{46}{5}\right)+22=0$$

இது சமனடைகிறது.

$\therefore$ c_1, c_2, c_3 என்ற மூன்று மையங்களும் (1) குறிக்கும் கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$x-y+1=0$ என்ற நேர்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $S\equiv x^2+y^2-3x=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடுகோடுகளின் நீளம் 2 என்றால் அந்தப் புள்ளிகள் யாவை?

$P(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளி, கொடுத்த நேர்கோடு $x-y+1=0$ என்பதன்மேல் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$\therefore\ x_1-y_1+1=0$ ... ... (1)

$P(x_1,\ y_1)$-லிருந்து $S=0$-க்கு வரைந்த தொடுகோட்டின் நீளம்,

$$=\sqrt{S_{11}}=2$$

அதாவது $x_1^2+y_1^2-3x_1=4$ ... ... (2)

(1), (2) இவைகளிலிருந்து y_1-ஐ விலக்கினால்

$$x_1^2+(x_1+1)^2-3x_1=4$$

அதாவது $2x_1^2 - x_1 - 3 = 0$

$\therefore \quad x_1 = -1$ அல்லது $\dfrac{3}{2}$

இவைகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால் முறையே $y_1 = 0, \dfrac{5}{2}$ கிடைக்கும்.

ஆகவே $x - y + 1 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளம் 2 ஆக இருக்கும்.

அப் புள்ளிகள் $(-1, 0), \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

மாதிரிக் கணக்கு 6 :

$S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தைக் குறித்து (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு (polar), $S' \equiv (x-a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தைத் தொட்டால், $y_1^2 + 2ax_1 = a^2$ என்று நிறுவுக.

$S = 0$-வைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$-ன் இசைக்கோடு

$S_1 = 0$ அல்லது $xx_1 + yy - a^2 = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$

ஆகும்.

$S' = 0$-வின் மையம் $c\,(a, 0)$, ஆரம் a c-யிலிருந்து (1)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்,

$$= \frac{ax_1 - a^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

(1)-க் குறிக்கும் இசைக் கோடு $S' = 0$-வைத் தொட்டால்,

$$\frac{ax_1 - a^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = a$$

அதாவது $\quad a^2 (x_1 - a)^2 = a^2 (x_1^2 + y_1^2)$

அதாவது $\quad y_1^2 + 2ax_1 = a^2$

மாதிரிக் கணக்கு 7:

$S \equiv x^2 + y^2 - a^2$ என்ற வட்டத்தின் AB என்ற நாண் அந்த வட்டத்தின் மையத்தில் 90°-ல் எதிர் கொள்கிறது (Subtends 90° at the centre) AB-யின் நடுப்புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

AB-யின் நடுப்புள்ளி $M(x_1, y_1)$ என்போம். அதனுல் AB-யின் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$ ஆகும்.

அதாவது $xx_1 + yy_1 - a^2 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$

அதாவது $xx_1 + yy_1 - (x_1^2 + y_1^2) = 0$ ... (1)

$S = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் ஆதி ஆகும்.

∴ OA, OB இவைகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண, $S = 0$-வை (1)-ன் உதவியால், சமபடித்தானதாக்க வேண்டும். (§ 28).

அப்படிச் செய்தால் OA, OB-களின் சமன்பபடு,

$$x^2 + y^2 - a^2 \left(\frac{xx_1 + yy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = 0$$

அதாவது $(x_1^2+y_1^2)^2 (x^2+y^2) - a^2 (xx_1+yy_1)^2 = 0$

அதாவது $x^2 \{(x_1^2+y_1^2)^2-a^2x_1^2\} + y^2 \{(x_1^2+y_1^2)-a^2y_1^2\}$
$-2a^2 x_1 y_1 xy = 0$

$OA \perp OB$ என்ருல் x^2-ன் குணகம் + x^2-ன் குணகம் = 0

∴ $(x_1^2 + y_1^2)^2 - a_1^2x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2y_1^2 = 0$

அதாவது $2(x_1^2 + y_1^2)^2 = a^2 (x_1^2 + y_1^2)$

$$x_1^2 + y_1^2 \pm 0 \text{ என்பதால், } x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2}{2}$$

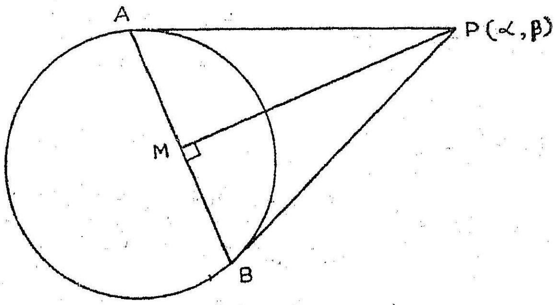
எனவே $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை (கீழ்க்குறி 1-ஐ நீக்கிய பின்பு) $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

இது $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ஆரமுடைய வட்டம்.

மாதிரிக் கணக்கு 8.

(α, β) என்ற புள்ளியிலிருந்து $S \equiv x^2 + y^2 - a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள், தொடுநாண் ஆகிய மூன்று கோடுகளுக்குள் அடங்கிய முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{a(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}$$ என்று நிறுவுக.



படம் 43.

$P(\alpha, \beta)$, PA, PB தொடுகோடுகள், AB தொடு நாண் என்போம்.

AB-க்கு $\perp$ ஆக PM வரைக. இதனால் $AM = MB$

$\therefore$ வேண்டிய முக்கோணமாகிய $\triangle PAB$-யின் பரப்பு $\triangle$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot PM = AM \cdot PM$$

அதாவது $\triangle = \sqrt{PA^2 - PM^2} \cdot PM$ ... (1)

AB-யின் சமன்பாடு $\alpha x + \beta y - a^2 = 0$

$$\therefore \quad PM = \frac{\alpha(\alpha) + \beta(\beta) - a^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (\S\, 19{\cdot}2)$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

மேலும், $AP = \sqrt{S_{11}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}$

$$\therefore \quad AP^2 - PM^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= (\alpha^2+\beta^2-a^2)\left[1 - \frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\alpha^2+\beta^2}\right]$$

$$= (\alpha^2+\beta^2-a^1)\cdot\frac{a^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{AP^2 - PM^2} = \frac{a(\alpha^2+\beta^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

இதை (1)-ல் பிரதியிட்டால், முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= \triangle = \frac{a(\alpha^2+\beta^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)}$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

$S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தைக் குறித்து $L \equiv lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டின் இசைப் புள்ளி (pole), $L' \equiv l'x + m'y + n' = 0$ என்ற கோட்டில் இருந்தால், $L' = 0$-வின் இசைப்புள்ளி $L = 0$-வின்மேல் இருக்கும் என நிறுவுக.

$L = 0$-வின் இசைப்புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்போம். ஆனல் அதன் (P-யின்) இசைக்கோடு $S_1 = 0$.

அதாவது $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$ ... ... (1)

எனவே, (1)-ம் $lx + my + n = 0$ என்ற கோடும் ஒன்றையே குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1}{l} = \frac{y_1}{m} = \frac{-a^2}{n}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-a^2 l}{n}, \quad y_1 = \frac{-a^2 m}{n}$$

அதாவது $L = 0$-வின் இசைப்புள்ளி

$$P\left(\frac{-a^2 l}{n}, \frac{-a^2 m}{n}\right)$$

எடுகோள்படி P என்ற புள்ளி $L' = 0$-வின்மேல் உள்ளது.

$$\therefore \ l'\left(\frac{-a^2 l}{n}\right) + m'\left(\frac{-a^2 m}{n}\right) + n' = 0$$

அதாவது $a^2 (ll' + mm') = nn'$ ... ... (2)

(2) சமச்சீருள்ளதால், $L' = 0$-வின் இசைப்புள்ளி $L = 0$ வின் மேல் இருக்கும்.

குறிப்பு : $L = 0$. $L' = 0$ ஆகிய இந்தக் கோடுகளை துணையியகோடுகள் (conjugate lines) என்பர்.

பயிற்சி 4.

1. கீழ்க்கண்ட வட்டங்களின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

(அ) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$

(ஆ) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

2. மையம் $3x + 4y + 1 = 0$ என்ற கோட்டின்மேல் உள்ளதும் $(4, -3), (-1, 2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதுமான வட்டம் எது ?

3. $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று x, y அச்சுகளைத் தொடும் வட்டங்கள் யாவை ?

4. $(3, 1)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு $4x + 3y = 9$ என்ற கோட்டைத் தொடும் வட்டம் யாது ?

5. $A(2, 0), B(-2, 0)$ என்பவை இரு நிலையான புள்ளிகள். $AP^2 + BP^2 = 16$ என இருக்கும்படி P என்ற புள்ளி நகர்ந்தால் அதன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அதன் மையம், ஆரம் காண்க.

6. $3x + 4y - 12 = 0$, $3x - 4y - 36$ $x = 0$ ஆகிய மூன்று கோடுகளைப் பக்கங்களாக உடைய ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் (incircle) காண்க.

7. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின்மேல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{c' - c}$ என்று காண்பிக்கவும்.

8. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ என்ற இருவட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என்று காண்பிக்கவும். அதன் மையம், ஆரம் கண்க.

9. $4x - 3y - 5 = 0$ என்பது $x^2 + y^2 + 3x - y - 10 = 0$ என்ற வட்டத்தின் நாண் என்ருல் அதன் நீளம் எவ்வளவு?

10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 + = 0$

என்ற வட்டங்கள் வெளியே தொட்டுக் கொள்கின்றன (touch each other externally) என்று காண்பிக்கவும். பொதுத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

11. $3x + 4y - 16 = 0$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுகிறது என்று காண்பிக்கவும். தொடு புள்ளியைக் காண்க.

12. $(4, 6)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு யாது?

13. ஆதியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 40 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன் பாடு காண்க. அவைகளுக்கிடையே உள்ள குறுங்கோணம் யாது?

14. ஒரு வட்டத்தைக் குறித்து ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடு, அந்தப் புள்ளியையும வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைத்த நேர்கோட்டுச் செங்குத்தாக இருக்கும் என்று நிறுவுக.

15. $(2, 3)$, $(-7, -12)$ என்ற புள்ளிகள்

$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ என்ற வட்டத்தைக் குறித்து துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points) என நிறுவுக.

16. $lx + my = 1$ என்ற நேர் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளி லிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 - a^2 (lx + my) = 0$ என்று நிறுவுக.

விடைகள்

1. (அ) $(4, -2)$, $\sqrt{21}$, (ஆ) $(1, 2)$, 0 (point circle)

2. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + \frac{214}{25} = 0$

5. $(0, 0)$, 2 6. $x^2 + y^2 - 6x - 16y + 9 = 0$

8. $\left(\frac{-11}{3}, 0\right)$, $\frac{10}{3}$ 9. 5 10. $5x + 12y + 19 = 0$

11. $(4, 1)$, 12. $7x^2 - 24xy + 88x + 96y - 464 = 0$

13. $3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$, $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

துணை அதிகாரம் 5.

வட்டத் தொகுதி

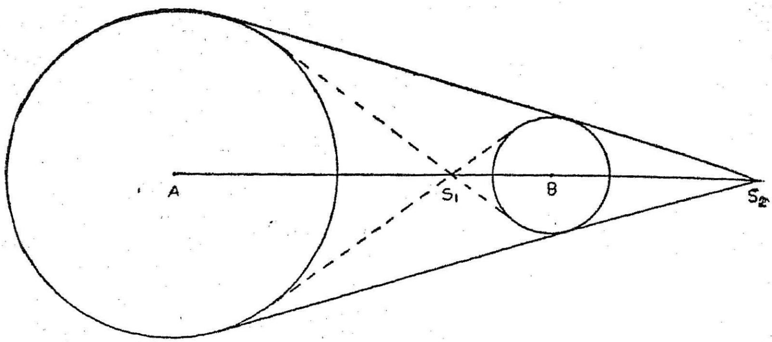
(System of circles)

§ 44. இரண்டு வட்டங்களுக்குப் பொதுவான தொடுகோடுகள் (Common tangents to two circle)

A, B என்பவை வெட்டிக் கொள்ளாத இரு வட்டங்களின் மையங்கள், r_1, r_2 அவைகளின் ஆரங்கள் என்போம்.

நேர் பொதுத் தொடுகோடுகள் (direct common tangents), குறுக்குப் பொது தொடுகோடுகள் (transverse common tangents AB-யில் முறையே S_1, S_2 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால்

$$\frac{AS_1}{S_1B} = \frac{AS_2}{BS_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

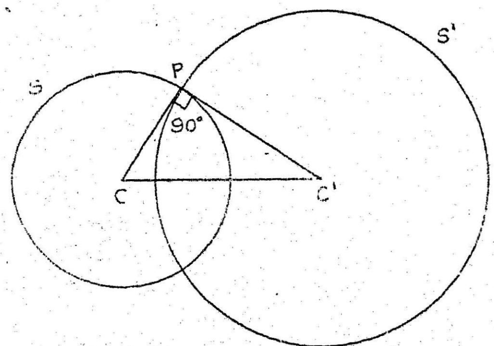


படம் 44.

குறிப்பு: வெட்டிக் கொள்ளும் இருவட்டங்களுக்குக் குறுக்குப் பொது தொடுகோடுகள் இல்லை.

§ 45. குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal circles)

வரைவிலக்கணம்: S, S' என்ற இருவட்டங்கள் P, P' என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். P அல்லது P' என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் $90°$ என்றால், அவ் வட்டங்களை குத்துவட்டங்கள் என்கிறோம்.



படம் 45.

C, C' என்பவை S, S' என்ற வட்டங்களின் மையங்கள் என்போம். CP, $C'P$ என்பவை மேற்படி வட்டங்களின் ஆரங்கள். S, S' என்பவை குத்து வட்டங்கள் என்பதால் PC' என்பது

S-ன் தொடுகோடாகவும், PC என்பது s'-ன் தொடுகோடாகவும் இருக்கவேண்டும். அதாவது ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் மற்றைய வட்டத்திற்கு தொடுகோடு ஆக வேண்டும் (படம் 45).

§ 46. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

என்ற இரு வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் ஆவதற்கான நிபந்தனை

$S = 0$-வின் மையம் $c(-g, -f)$,

$$\text{ஆரம்} = cP = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$S' = 0$-வின் மையம் $c'(-g', -f')$,

$$\text{ஆரம்} + c'P = \sqrt{(g')^2 + (f')^2 - c'}$$

$$Cc' = \sqrt{(g-g')^2 + (f-f')^2} \quad (\text{படம் } 45)$$

$S = 0$, $S' = 0$ ஆகியவை குத்து வட்டங்கள் என்றால்,

$$(cc')^2 = cP^2 + (c'P)^2$$

அதாவது $(g-g')^2 + (f-f')^2$

$$= g^2 + f^2 - c + (g')^2 + (f')^2 - c'$$

$$\therefore \; -2gg' - 2ff' = -c - c'$$

அதாவது $2gg' + 2ff' = c + c'$

§ 47. சமத்தொடு அச்சு (Radical Axis)

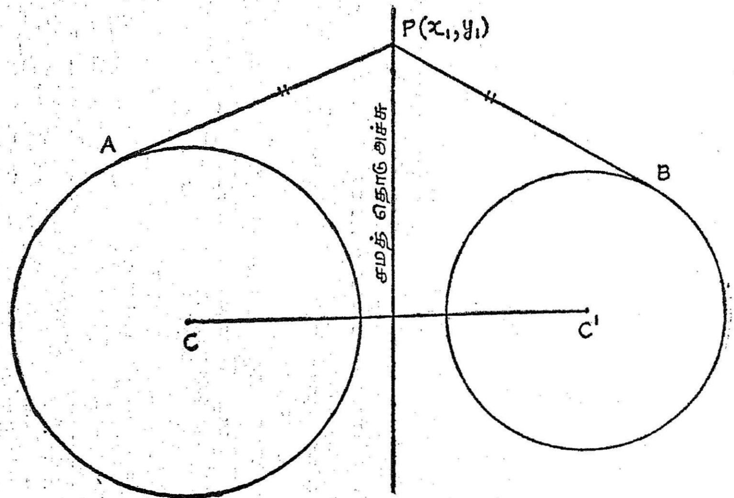
எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து கொடுத்த இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளங்கள் சமமாகின்றனவோ, அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை சமத்தொடு அச்சு எனப்படும்.

குறிப்பு: சமத்தொடு அச்சு என்பதை இனிச் சுருக்கமாக ச. அச்சு என்று குறிப்பிடுவோம்.

§ 47·1. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

என்ற இருவட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு



படம் 46.

$P(x_1, y_2)$ என்பது ச. அச்சின்மேல் ஒரு புள்ளி என்போம்.

$\therefore$ P-யிலிருந்து $S = 0, S' = 0$ ஆகிய வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளங்கள் சமம்.

$$\therefore \sqrt{S_{11}} = \sqrt{S_{11}'} \quad \text{அதாவது } S_{11} = S_{11}'$$

அதாவது

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = x_1^2 + y_1^2 + 2g'x_1 + 2f'y_1 + c'$$

அதாவது $2(g - g')x_1 + 2(f - f')y_1 + (c - c') = 0$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் நியமப்பாதை

$$2(g - g')x + 2(f - f')y + (c - c') = 0$$

அல்லது சுருக்கமாக $S - S' = 0$

குறிப்பு: 1. ச. அச்சின் சமன்பாடு ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பதால், அது ஒரு நேர்கோடாகும்.

2. ச. அச்சின் சரிவு $= -\dfrac{g - g'}{f - f'}$

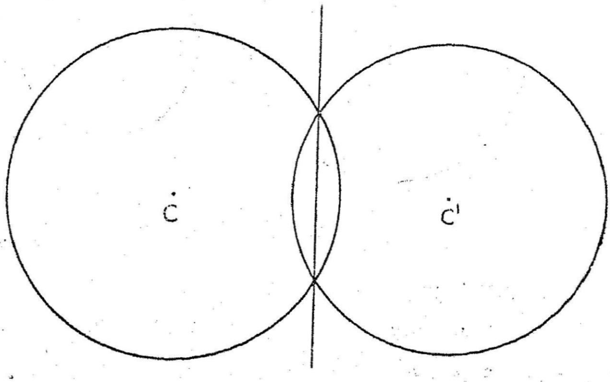
மையப் பிணைகோடு (line of centres)

$$cc'\text{-ன் சரிவு} = \frac{f - f'}{g - g'}$$

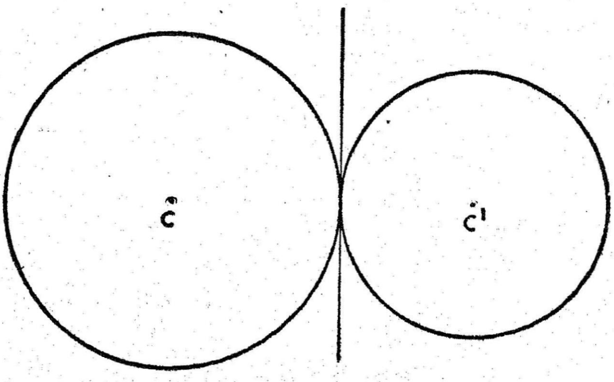
$$\therefore \quad (\text{ச. அச்சின் சரிவு}) \times (cc'\text{-ன் சரிவு}) = -1$$

எனவே ச. அச்சு மையப் பிணைகோட்டுக்குச் செங்குத்தாக அமைந்துள்ளது.

3. ச. அச்சின் சமன்பாட்டை $S - S' = 0$ என்று எழுதும் போது $S = 0, S' = 0$ என்பவை நியம வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.



படம் 47 (a).

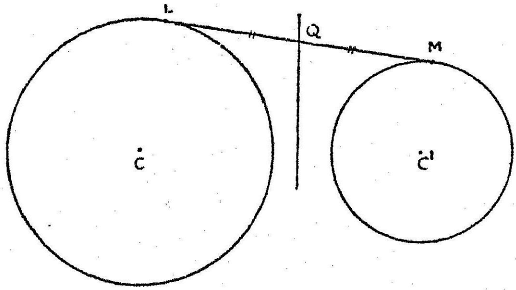


படம் 47 (b).

4. $S = 0$. $S' = 0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டிக்கொண்டால்- அவைகளின் ச. அச்சு பொது நாண் ஆகும் [படம் 47 (a)]

5. அந்த வட்டங்கள் (உள்ளிலோ அல்லது வெளியிலோ) தொட்டுக்கொண்டால் அவைகளின் ச. அச்சு பொதுத் தொடு கோடு ஆகும் [படம் 47 (b)].

6. இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடு ச. அச்சினுல் இரு சம கூறுக்கப்படும் [படம் 47 (c)].



படம் 47 (c).

§ 48. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

$$S'' \equiv x^2 + y^2 + 2g''x + 2f'' + c'' = 0$$

என்ற மூன்று வட்டங்களில் இரண்டிரண்டாக எடுத்துக்கொண்டால் அவைகளின் ச. அச்சுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

கொடுத்துள்ள வட்டங்களில் மூன்று ச. அச்சுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$S - S' = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$S' - S'' = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$S'' - S = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

ஆகும்.

இப்போது (1)-ம் (2)-ம் சந்திக்கும் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்போம். இதனுல்,

$$\left. \begin{array}{l} S_1 - S'_1 = 0 \\ S_1' - S''_1 = 0 \end{array} \right\}$$

இவைகளைக் கூட்டினால் $S_1 - S_1'' = 0$ ... (4)

சமன்பாடு (4)-லிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி $S - S'' = 0$ அதாவது ச அச்சு (3)-ன் மேலும் உள்ளது என்று தெளிவாகிறது.

அதாவது மூன்று ச. அச்சுகளும் ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

குறிப்பு: இந்தப் பொதுப் புள்ளிக்கு சமத்தொடு அச்சு சந்தி (Radical centre) என்று பெயர்.

§ 49. $S'S$ என்ற இரு வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் மையம், S, S'-களின் சமதொடு அச்சில் இருக்கும்.

கொடுத்துள்ள இரு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

மற்றும் $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ என்போம்.

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + 2Gx + 2Fy + c = 0$$

என்ற வட்டம் S, S'-களை செங்குத்தாக வெட்டட்டும்.

இதனால் $2gG + 2fF = c + C$

மற்றும் $2g'G + 2f'F = c' + C$

கழித்தால் $2(g - g')G + 2(f - f')F = c - c'$ ... (1)

Σ-வின் மையம் $(-G, -F)$

S, S'-களின் ச. அச்சு $2(g-g')x + 2(f-f') + c - c' = 0$. (2)

(2)-ல் $(-G, -F)$ இட்டால்

$$2(g-g')(-G) + 2(f-f')(-F) + (c - c') = 0$$

அல்லது $2(g - g')G + 2(f - f')F = c - c'$ ... (3)

(1)-ம் (3)-ம் ஒன்றாக இருப்பதால் Σ-வின் மையம் S, S'-களின் ச. அச்சாகிய (2)-ல் இருக்கிறது.

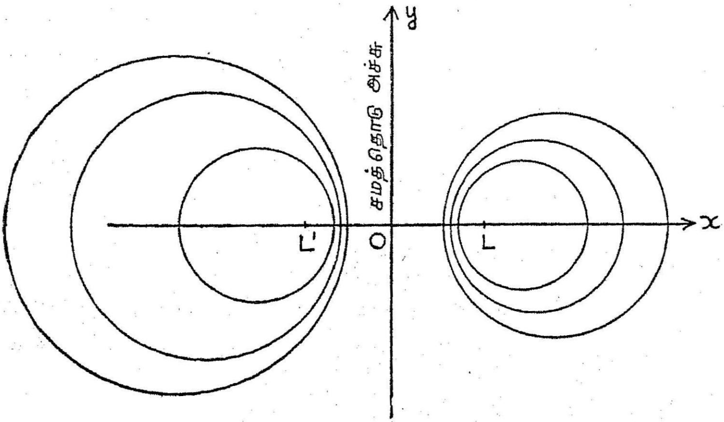
§50. பொது அச்சு வட்டங்கள் (Coaxal circles)

ஒரு வட்டத்தொகுதியில் (system of circles) உள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் ஒரே ஒரு சமத்தொடு அச்சு இருக்குமானால்,

அந்த வட்டத் தொகுதிக்கு பொது அச்சு வட்டத் தொகுதி (அல்லது பொதுவச்சு வட்டங்கள்) என்று கூறுவர்.

குறிப்பு : பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சுருக்கமாக "பொ. வ. தொகுதி" என்று குறிப்பிடுவோம்.

§ 51. பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு மிக எளிய (simplest) சமன்பாடு



படம் 48.

மையப் பிணைகோட்டை (line of centres) x-அச்சாகவும், சமத்தொடு அச்சை y-அச்சாகவும், இவைகள் சந்திக்கும் O என்ற புள்ளியை ஆதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ளவும்.

இந்த வட்டத் தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களின் மையங்களும் x-அச்சில் அமைந்துள்ளதால், அவைகளின் (மையங்களின்) y-ஆ. தொ. பூச்சியமாகும்.

எனவே அந்த வட்டத் தொகுதியின் ஒரு மாதிரி வட்டம்

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆகும். இதில் λ-வும், c-யும் ஏதாவது மாறிலிகள் (arbitrary constants)

ஆதி ச. அச்சில் உள்ளதால், ஆதியிலிருந்து (1)-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்

$$= 0 + 0 + 0 + c = c$$

இந்த நீளம் வட்டத் தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களுக்கும் பொருந்தும். எனவே c ஏதாவது ஒரு மாறிலி அல்ல, ஆனால் ஒரு நிலையான மாறிலி (c is not an arbitrary constant but a fixed constant). எனவே (1)-ல் λ மட்டும்தான் ஏதேனும் ஒரு மாறிலி arbitrary constant).

எனவே பொ. வ. தொகுதிக்கு நாம் விரும்பிய மிக எளிய சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேலே கண்ட சமன்பாட்டில் λ-க்குத் தரப்படும் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் வட்டத் தொகுதியின் ஒரு வட்டம் கிடைக்கும்.

§ 52. எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting points)

§ 51-ல் கண்ட பொ. வ. தொகுதி (1)-ன் ஆரம் $= \sqrt{\lambda^2 - c}$, மையம் $(-\lambda, 0)$

எனவே அந்த வட்டத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டமும் உண்மை வட்டமும் உண்மை வட்டமாக இருக்கவேண்டும். என்றால் அவைகளின் ஆரம் நேர்க்குறி (positive sign) உடையதாகவேண்டும்.

அதாவது $\lambda^2 - c > 0$

அதாவது $(\lambda - \sqrt{c})(\lambda + \sqrt{c}) > 0$

$\therefore \quad \lambda > \sqrt{c}$ அல்லது $\lambda > -\sqrt{c}$

அதாவது $L(\sqrt{c}, 0)$, $L'(-\sqrt{c}, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையில் வட்டத் தொகுதியின் மையங்கள் அமையக் கூடாது.

எனவே இந்த புள்ளிகள்

$$L(\sqrt{c}, 0) \text{ மற்றும் } L'(-\sqrt{c}, 0)$$

எல்லைப் புள்ளிகள் என்ற பெயர்பெறுகின்றன.

மேலும் $\lambda^2 = b$ அல்லது $\lambda = \pm\sqrt{c}$

என்றால் வட்டத்தொகுதியின் ஆரம் $= 0$

அதாவது பொ. வ. தொகுதியில் இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் $(\pm\sqrt{c}, 0)$. அவைகளின் ஆரங்கள் $= 0$.

எனவே $L(\sqrt{c}, 0)$, $L'(-\sqrt{c}, 0)$ என்ற எல்லைப் புள்ளிகள் பொ. வ. தொகுதியின் புள்ளி வட்டங்கள் ஆகும். இவைகளும் அதாவது தொகுதியின் உறுப்புக்களே என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

§ 53. முக்கிய குறிப்பு

ஆதியிலிருந்து வட்டத்தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் c என்று § 51-ல் பார்த்தோம். எனவே,

(i) $c > 0$ என்றால் ஆதியும் (அதனால் ச. அச்சும்) பொ. வ. தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களுக்கும் வெளியே உள்ளன என்று தெளிவாகிறது. அதாவது பொ. வ. தொகுதி வெட்டிக்கொள்ளாத தொகுதி (non-intersecting system) ஆகும். மேலும், L, L' என்ற எல்லைப் புள்ளிகள் உண்மையான புள்ளிகளாகும். ச. அச்சு எல்லா வட்டங்களுக்கும் வெளியில் இருக்கும்.

(ii) $c < 0$ என்றால், ஆதியும் (அதனால் ச. அச்சும்) பொ. வ. தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களுக்கும் உள்ளே உள்ளன என்று தெளிவாகிறது. அதாவது பொ. வ. தொகுதி வெட்டிக்கொள்ளும் தொகுதி (intersecting system) ஆகும். ஆனால், L, L' என்ற எல்லைப் புள்ளிகள் கற்பனைப் புள்ளிகள் ஆகும். ச. அச்சு பொது நாண் ஆகும்.

(iii) $c = 0$ என்றால் ஆதியும் (அதனால் ச. அச்சும்) பொ. வ. தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களுக்குமேல் இருக்கும் எனத் தெளிவாகிறது. அதாவது பொ. வ. தொகுதி தொட்டுக் கொள்ளும் தொகுதி (touching system) ஆகும். L, L' என்ற இரு எல்லைப் புள்ளிகளும் ஆதியாகிய ஒரே புள்ளியில் ஒன்றிவிடும் (Linating points coincide with the origin) ச. அச்சு எல்லா வட்டங்களையும் தொடும்.

(iv) § 51-ல் பார்த்த பொ. வ. தொகுதியின் சமன்பாட்டைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{1}{\lambda}(x^2+y^2) + 2x + \frac{c}{\lambda} = 0$$

$\lambda \to \infty$ என்றால், $x = 0$ ஆகும்.

அதாவது $\lambda = \infty$ என்றால், வட்டத் தொகுதியின் ஒரு உறுப்பாக $x = 0$ என்ற ச. அச்சு கிடைக்கிறது.

எனவே ச. அச்சும் அந்த பொ. வ. தொகுதியின் ஒரு சிறப்பு உறுப்பாகக் கொள்ளவேண்டும்.

§ 54. $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ... ... (A)
என்ற பொ. வ. தொகுதிக்குச் செங்குத்தாக மற்றொரு பொ. வ. தொகுதி (Orthogonal coaxal system)

கொடுத்துள்ள தொகுதிக்குச் செங்குத்துப் பொ. வ. தொகுதி

$$x^2 + y^2 + 2Gx + 2Fy + k = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்போம் இங்கே. G, F, k என்பவை ஏதாவது மாறிலிகள் (orbitrary constants) ஆகும்.

(1)-ம், (A)-யும் செங்குத்து என்பதால், (1)-ன் மையம் (A)-ன் ச. அச்சில் (அதாவது $x = 0$-வில்) இருக்க வேண்டும்.

எனவே $G = 0$

மேலும், $2\lambda . G + 2 . 0 . F = c + k$

அதாவது $0 + 0 = c + k$

அதாவது $k = -c$

(A)-யில் c என்பது நிலையான மாறிலி (fixed constant)

$\therefore$ k-யும் நிலையான மாறிலி ஆகும்.

(1)-ல் F-க்குப் பதிலாக μ எழுதினால் செங்குத்துப் பொ. வ. தொகுதியின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (B)$$

ஆகும். இதில் μ மாத்திரம் ஏதாவது மாறிலி.

குறிப்பு: 1. (A), (B) இவைகளை இணை பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிகள் (conjugate coaxal system) என்று அழைப்பர்.

2. (B)-யின் மையங்கள் y-அச்சில் (அதாவது (A)-யின் ச. அச்சில்) உள்ளன. அதன் ச. அச்சு x-அச்சு (அதாவது (A) யின் மையப்பிணை கோடு) ஆகும்.

3. (A)-யின் எல்லைப் புள்ளிகள் $L(\sqrt{c}, 0)$, $L'(-\sqrt{c}, 0)$ (B)-யைச் சமனடையச் செய்கின்றன. எனவே, எல்லைப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டங்கள் எல்லாம் செங்குத்து வட்டங்கள் ஆகும். இதன் மறுதலையும் (converse) உண்மையே.

§55. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் இரண்டு வட்டங்கள் தெரிந்தால் அந்த பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாடு காணலாம்.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

என்பவை கொடுத்த இரு வட்டங்கள் என்போம்

$$S + \lambda S' \equiv (1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(g + \lambda g')x + 2(f + \lambda f')y + (c + \lambda c') = 0 \quad \dots \quad (A)$$

அல்லது

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + \frac{2(g+\lambda g')}{1+\lambda}x + \frac{2(f+\lambda f')}{1+\lambda}y + \frac{c+\lambda c'}{1+\lambda} = 0 \quad (A')$$

என்பதை இப்போது ஆராய்வோம்.

(A')-ன் வடிவத்திலிருந்து λ-வின் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும் $(\lambda \pm -1)$, $S + \lambda S' = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். $S + \lambda S' = 0$ என்பது ஒரு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும். இந்தத் தொகுதிக்கு ஒரே ஒரு ச அச்சு உண்டென்று இப்போது காண்பிப்போம்.

(A')-ன் இரண்டு மாதிரி வட்டங்களை (representative circles) எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதாவது

$$x^2 + y^2 + \frac{2(g+\lambda_1 g')}{1+\lambda_1}x + \frac{2(f+\lambda f')}{1+\lambda_2}y + \frac{c+\lambda_1 c'}{1+\lambda_1} = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2(g+\lambda_2 g')}{1+\lambda_2}x + \frac{2(f+\lambda_2 f')}{1+\lambda_1}y + \frac{c+\lambda_2 c'}{1+\lambda_2} = 0 \quad (2)$$

(1), (2)-களின் ச. அச்சின் சமன்பாடு

$$2\left[\frac{(g+\lambda_1 g')}{(1+\lambda_1)} - \frac{g+\lambda_2 g'}{1+\lambda_2}\right]x + 2\left[\frac{f+\lambda_1 f'}{1+\lambda_1} - \frac{f+\lambda_2 f'}{1+\lambda_2}\right]y + \left[\frac{c+\lambda_1 c'}{1+\lambda_1} - \frac{c+\lambda_2 c'}{1+\lambda_2}\right] = 0$$

இதை சுருக்கினால்

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)} [2(g-g')x + 2(f-f')y + c - c'] = 0$$

இங்கே $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ஆகையால் $\lambda_1 - \lambda_2$-ஆல் வகுக்கலாம்.

$$\therefore \quad 2(g-g')x + 2(f-f')y + c-c' = 0 \quad \dots \quad (1)$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் λ_1, λ_2 உறுப்புகள் இல்லை எனவே, $S + \lambda S' = 0$ என்ற தொகுதியில் உள்ள எந்த இரு வட்டங்களுக்கும் (1) பொருந்தும். அதாவது $S + \lambda S' = 0$ என்ற வட்டத் தொகுதிக்கு ஒரே ஒரு ச. அச்சு உண்டு. அது (1) ஆகும்.

$\therefore$ $S = 0$, $S' = 0$ என்ற வட்டங்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட பொ. வ. தொகுதி.

$S + \lambda S' = 0$ ஆகும். அதன் ச. அச்சு $S - S' = 0$

முக்கியக் குறிப்பு :

1. $S + \lambda S' = 0$ என்பதில் $\lambda = -1$ என்று இட்டால் $S - S' = 0$ என்ற ச. அச்சு கிடைக்கிறது. எனவே, ச. அச்சை பொ. வ. தொகுதியின் ஒரு சிறப்பு உறுப்பு (special member) எனக் கொள்ளவேண்டும் [§ 53 (iv)-ஐப் பார்க்கவும்].

2. $S = 0$, $S' = 0$ என்ற இரு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால் $S + \lambda S' = 0$ என்பது ஒரு வெட்டிக் கொள்ளும் பொ. வ. தொகுதியைக் குறிக்கும். அதன் ச. அச்சு பொது நாண் ஆகும். எனவே, $S = 0$, $S' = 0$ என்ற இரு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ ஆகும்.

§ 57. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$L \equiv lx + my + n = 0$

என்பவை முறையே ஒரு வட்டம், ஒரு நேர்கோடு என்றால், $S + \lambda L = 0$ என்பது $L = 0$ என்பதை சமத்தொடு அச்சாகவும், $S = 0$ என்பதை ஒரு உறுப்பாகவும் கொண்ட ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

λ-வின் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும் $S + \lambda L = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் என்பது வெளிப்படை. எனவே, λ-வின் பல மதிப்புகளுக்கு, $S + \lambda L = 0$ என்பது ஒரு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

இந்தத் தொகுதியில் இரண்டு மாதிரி வட்டங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $S + \lambda_1 L = 0$ மற்றும் $S + \lambda_2 L = 0$

இவைகளின் ச. அச்சு $(S + \lambda_1 L) - (S + \lambda_2 L) = 0$

அதாவது $(\lambda_1 - \lambda_2) L = 0$

ஆனால் $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \therefore \quad L = 0$

இதில் λ_1. λ_2 ஆசியவை காணவில்லை ஆகவே, λ-வுக்கு எந்த மதிப்பு இருந்தாலும் மேற்படி தொகுதியின் ச. அச்சு $L = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ ஒரு வட்டமும் ச. அச்சும் தெரிந்தால் பொ. வ தொகுதி சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு : 1. $S = 0$ என்ற வட்டமும் $L = 0$ என்ற நேர்கோடும் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால், $S + \lambda L = 0$ என்பது ஒரு வெட்டும் பொ. வ. தொகுதியைக் குறிக்கும்.

எனவே $S = 0$ என்ற வட்டமும் $L = 0$ என்ற கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$ ஆகும்.

2. பொ. வ. தொகுதியைப் பொறுத்த கணக்குகள் செய்யும் போது மேற்படி பொ. வ. தொகுதியை $S + \lambda S' = 0$ என்ற உருவத்தில் தேர்ந்தெடுப்பதைவிட $S + \lambda L = 0$ என்ற வடிவத்தில் தேர்ந்தெடுப்பதில் நன்மை பயக்கும். கணக்கு செய்வது எளிதாகவும் இருக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$$S \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

என்ற இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$S = 0$-வின் மையம் $A\,(0, 0)$, ஆரம் $= r_1 = 1$

$S' = 0$-வின் மையம் $B\,(1, 3)$, ஆரம் $= r_2 = 2$

$$AB^2 = 1^2 + 3^2 \qquad \therefore \quad AB = \sqrt{10} > r_1 + r_2$$

எனவே வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளவில்லை. அதனுல் மேற்படி வட்டங்களுக்கு இரண்டு நேர் பொதுத் தொடுகோடுகளும் இரண்டு குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளும் உண்டு. அவைகள் AB-யை முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினுல்,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ P-யின் ஆ. தொ. $\left(\frac{1+0}{1+2}, \frac{3+0}{1+2}\right)$

அதாவது $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Q-வின் ஆ. தொ. $\left(\frac{1-0}{1-2}, \frac{3-0}{1-2}\right)$

அதாவது $(-1, -3)$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $S = 0$-வுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$S_1{}^2 = SS_{11}$

அதாவது $(xx_1 + yy_1 - 1)^2 = (x^2 + y^2 - a^2)(x_1{}^2 + y_1{}^2 - 1)$

$\therefore$ $P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$-லிருந்து $S = 0$-வுக்கு வரையப்படும் குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{1}{3}x + y - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{a} + 1 - 1\right)(x^2 + y^2 - 1)$$

இதைச் சுருக்கினுல்,

$$4x^2 + 3xy - 3x + 9y + 5 = 0$$

இதேபோல் $Q\,(-1, -3)$-யிலிருந்து $S = 0$-க்கு வரையப்படும் நேர் பொதுத் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$(-x - 3y - 1)^2 = (x^2 + y^2 - 1)(1 + 9 - 1)$$

அல்லது $8x^2 - 6xy - 2x - 6y - 10 = 0$

அதாவது $4x^2 - 3xy - x - 3y - 5 = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$x+y=4$ என்ற கோட்டில் மையத்தை உடைய $S \equiv x^2+y^2-4x+2y+4=0$ என்ற வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டு ஆதிவழியாகச் செல்கிறது. அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வேண்டிய வட்டம் ஆதிவழியாகச் செல்வதால் அதை $S' \equiv x^2 + 2gx + 2fy=0$ என்போம். இதன் மையம் $(-g, -f)$, $x + y = 4$ என்ற கோட்டில் உள்ளது.

$\therefore \quad -g - f = 4 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$

மேலும் $S = 0$, $S' = 0$ செங்குத்து விட்டங்கள்

$$2g(-2) + 2f(1) = 0 + 4$$

அல்லது $-2g + f = 2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$

$(1) + (2)$; $-3g = 6 \quad \therefore \quad g = -2$

மேலும் $f = -2$

$\therefore$ நாம் விரும்பிய வட்டம் $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$$

ஆகிய இரு வட்டங்களின் பொது நாண் விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

கொடுத்துள்ள வட்டங்களின் பொதுநாண், அவைகளின் ச. அச்சு ஆகும்.

அதாவது $S - S' = 0$, அதாவது $L \equiv 2x + 1 = 0$

எனவே $S = 0$-வும், $L = 0$-வும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் $S + \lambda L = 0$

அதாவது $\Sigma \equiv x^2 + y^2 + (2 + 2\lambda)x + 3y + (1 + \lambda) = 0$

இதன் மையம் $C\left[-(1 + \lambda), -\frac{3}{2}\right]$

$\Sigma = 0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டம் $L = 0$ என்றால் C என்ற மையம் $L = 0$-வில் இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad -2(1 + \lambda) + 1 = 0$$

அதாவது $\lambda = -\frac{1}{2}$

இதை $\Sigma = 0$-வில் பிரதியிட்டால், நாம் விரும்பிய வட்டம் கிடைக்கும்.

அதாவது $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$.

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$S \equiv x^2 + y^2 - 4, \quad S' \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ என்ற இரு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் சென்று $x + 2y - 5 = 0$ என்ற கோட்டைத் தொடும் வட்டம் யாது?

கொடுத்த வட்டங்களின் பொது நாண் $S - S' = 0$

அதாவது $L \equiv x + 2y - 4 = 0$

அந்த வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம்

$$S + \lambda L = 0$$

அதாவது $\Sigma \equiv x^2 + y^2 + \lambda x + 2\lambda y - 4(\lambda + 1) = 0$

இதன் மையம்

$$\left(-\frac{\lambda}{2}, -\lambda\right), \text{ ஆரம்} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 + 4(\lambda + 1)}$$

$\Sigma = 0$ என்ற வட்டம் $x + 2y - 5 = 0$ என்ற கோட்டைத் தொட்டால்,

$$\left|\frac{-\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 5}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 + 4(\lambda + 1)}$$

$$\therefore \quad \frac{5(\lambda+2)^2}{4} = \frac{5\lambda^2+16\lambda+16}{4}$$

$$\therefore \quad 5\lambda + 20\lambda + 20 = 5\lambda^2 + 16\lambda + 16$$

$$\therefore \quad \lambda = -1$$

இதை $\Sigma = 0$-வில் பிரதியிட்டால் நாம் விரும்பிய வட்டம் கிடைக்கும்.

அதாவது $x^2 + y - x - 2y = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$$S \equiv x^2 + y^2 + \ x + 5y - 2 = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2x + 5y - 4 = 0$$

என்ற இரு வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாக உடைய வட்டம் யாது? பொது நாணின் நீளம் யாது?

பொது நாணின் (அதாவது ச. அச்சின்) சமன்பாடு $S - S' = 0$ அதாவது $L \equiv x - 2 = 0$

பொதுநாணும் $S = 0$ என்ற வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$ ஆகும்.

அதாவது $\Sigma \equiv x^2 + y^2 + (\lambda + 1)x + 5y - (2 + 2\lambda) = 0$

இதன் மையம் $c\left[-\frac{\lambda+1}{2}, \frac{-5}{2}\right]$ ஆகும்.

பொதுநாண் $\Sigma = 0$-வின் விட்டம் என்றால், C என்ற மையம் $L = 0$ என்ற பொது நாண்மேல் இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad -\frac{\lambda+1}{2} - 2 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = -5.$$

இதை $\Sigma = 0$-வில் பிரதியிட்டால் நாம் விரும்பிய வட்டத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதாவது $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0.$

$$\text{இதன் ஆரம்} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \text{பொது நாணின் நீளம்} = 2 \times \text{ஆரம்} = 3$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$$

என்ற வட்டங்கள் தொட்டுக் கொள்கின்றன என்று காண்பிக்கவும். தொடுபுள்ளியையும் காண்க. (B. E. '63)

கொடுத்துள்ள வட்டங்களின் ச. அச்சு $S - S' = 0$

அதாவது $L \equiv 4x + 3y + 7 = 0$

இந்த ச. அச்சு $L = 0$. $S = 0$-வைத் தொட்டால், $S = 0$-வும் $S' = 0$-வும் அதே புள்ளியில் தொட்டுக்கொள்ளும். ஆகவே $L = 0$, $S = 0$-வை தொடுகிறதென்று காண்பித்து, அவைகளின் தொடுபுள்ளி கண்டால் போதுமானது.

$S = 0$-வின் மையம் $c\,(-1, 4)$, ஆரம் $= \sqrt{1 + 16 - 8} = 3$
$c(-1, 4)$-லிருந்து $L = 0$-க்கு உள்ள தூரம்

$$= \left| \frac{4\,(-1) + 3 \cdot 4 + 7}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right|$$

$$= 3$$

$$= S = 0\text{-வின் ஆரம்}$$

$\therefore \quad L = 0,\ S = 0$-வைத் தொடுகிறது.

$\therefore \quad S = 0$-வும், $S' = 0$-வும் தொட்டுக்கொண்டிருக்கின்றன.

இப்போது cc'-ன் சமன்பாடு

$$\frac{y + 4}{x + 1} = \frac{4 - 1}{-1 + 5} = \frac{3}{4}$$

அதாவது $3x - 4y + 19 = 0$ ... ... (1)

$L = 0$ மற்றும் (1) ஆகியவற்றின் தீர்வு காணில் தொடுபுள்ளி கிடைக்கும்.

இப்படிச் செய்தால் $x = -\frac{17}{5}$, $y = \frac{11}{5}$

$\therefore$ தொடுபுள்ளி $\left(-\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$

மாதிரிக் கணக்கு 7.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஒரு எல்லைப் புள்ளியின் இசைக்கோடு (polar) மற்ற எல்லைப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் (அதாவது எல்லைப் புள்ளிகள் துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points)) என்று காண்பிக்கவும்.

பொ. வ. தொகுதி $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ... (1)

என்போம்.

இதன் எல்லைப் புள்ளிகள் $L(\sqrt{c}, 0)$, $L'(-\sqrt{c}, 0)$

(1)-ஐக் குறித்து L-ன் இசைக்கோடு

$$\sqrt{c}\,x + \lambda(x + \sqrt{c}) + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$L'(-\sqrt{c}, 0)$-வை (2)-ல் பிரதியிட்டால்

$$\sqrt{c}\,(-\sqrt{c}) + \lambda(-\sqrt{c} + \sqrt{c}) + c = 0$$

இந்தச் சமன்பாடு சமமடைகிறது.

$\therefore$ L-ன் இசைக்கோடு L' வழியாகச் செல்கிறது. இதே போல் L'-ன் இசைக்கோடு L வழியாகச் செல்லும் என்று காண்பிக்கலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 8.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$ என்ற வட்டங்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

கொடுத்துள்ள வட்டங்களின் ச. அச்சு $S - S' = 0$

அதாவது $L \equiv x - y - 1 = 0$

∴ பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாடு

$$S+\lambda L \equiv x^2+y^2 (2+\lambda)x+(4-\lambda)y+(7-\lambda)=0 \quad \dots \quad (1)$$

இதன் மையம் $c\left[-\frac{1}{2}(2+\lambda), -\frac{1}{2}(4-\lambda)\right] \quad \dots \quad (2)$

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{\frac{1}{4}(2+\lambda)^2+\frac{1}{4}(4-\lambda)^2-(7-\lambda)}$$

சமன்பாடு (1) ஒரு எல்லைப் புள்ளியைக் குறிக்குமானால், அதன் ஆரம் $= 0$

அதாவது $\frac{1}{4}(2+\lambda)^2+\frac{1}{4}(4-\lambda)^2-(7-\lambda)=0$

$\therefore \quad 2\lambda^2-8=0 \qquad \therefore \quad \lambda = \pm 2$

λ-வின் இரு மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால் நாம் விரும்பும் இரு எல்லைப் புள்ளிகளும் கிடைக்கும்.

அதாவது $L(-2, -1)$, $L'(0, -3)$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஒரு வட்டம் $S \equiv x^2+y^2+4x+2y+1=0$ ஆகும். அதன் ஒரு எல்லைப் புள்ளி ஆதி என்றால், மற்ற எல்லைப் புள்ளி யாது? இந்தத் தொகுதியின் செங்குத்துப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி காண்க.

ஆதி என்ற எல்லைப் புள்ளியை வட்டத்தின் சமன்பாடு வடிவத்தில் எழுதினால் $S' \equiv x^2+y^2=0$ எல்லைப் புள்ளிகளும் பொ. வ. தொகுதியின் உறுப்புகளாதலால், மேற்படி தொகுதியின் ச. அச்சு $S-S'=0$ ஆகும்.

அதாவது $L \equiv 4x+2y+1=0$

எனவே மேற்படி பொ. வ. தொகுதியின் சமன்பாடு

$$S'+\lambda L \equiv x^2 y^2+4\lambda x+2\lambda y+\lambda=0 \quad \dots \quad (1)$$

இதன் மையம் $c(-2\lambda, -\lambda)$. ஆரம் $= \sqrt{4\lambda^2+\lambda^2-\lambda}$ சமன்பாடு (1), ஒரு எல்லைப் புள்ளியைக் குறித்தால் அதன் ஆரம் பூச்சியம் ஆகும்.

$\therefore \quad 5\lambda^2 - \lambda = 0$

அதாவது $\lambda = 0$ அல்லது $\lambda = \frac{1}{5}$

$\lambda = 0$ என்ருல் $c\,(0, 0)$ ஆகும். இது கொடுத்த எல்லைப் புள்ளி

$\lambda = \frac{1}{5}$ என்ருல் $c\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ஆகும்.

எனவே நாம் விரும்பிய மற்ருெரு எல்லைப் புள்ளியின் ஆ. தொ. $\left(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

செங்குத்து பொ. வ. தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களும் (1)-ன் எல்லைப் புள்ளிகளான $P\,(0, 0)$, $P'\left(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ வழியாகச் செல்லும்

மேற்படி செங்குத்துத் தொகுதியை

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்ற சமன்பாட்டால் குறிப்பிடுவோம்.

இது P, P' வழியாகச் செல்வதால் $c = 0$

மற்றும் $\frac{4}{25} + \frac{1}{25} - \frac{4g}{5} - \frac{2f}{5} = 0$

அல்லது $4g + 2f = 1$

அல்லது $g = \frac{1 - 2f}{4}$

இவைகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்

$$x^2 + y^2 + \frac{1 - 2f}{2}\,x + 2fy + 0 = 0$$

அல்லது $2\,(x^2 + y^2) + (1 - 2f)\,x + 2fy = 0$

இங்கே f என்பது ஏதாவது ஒரு மாறிலி

பயிற்சி 5.

1. கீழ்க்கண்ட வட்ட சோடிகளின் பொதுத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

(அ) $x^2 + y^2 + 20x - 6y - 116 = 0;$
$x^2 + y^2 - 24x + 2y + 120 = 0$

(ஆ) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0;$
$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

(இ) $x^2 + y^2 = 16;\quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

2. கீழ்வரும் மூன்று வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0;$
$x^2 + y^2 + 3x + 5y = 0$
$x^2 + y^2 + 4x + 5y - 1 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0;$
$x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0$
$x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$ (B.E. '65, S.V.'ty)

(c) $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0;$
$x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$
$x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$

3. $x^2 + y^2 = 9x - 14;\quad x^2 + y^2 + 15x + 14 = 0$ என்ற வட்டங்களை செங்குத்தாக வெட்டும், $(2, 5)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டம் யாது? (B. Tech. '70)

4. $(0, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று

$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0;$

$x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ என்ற வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் விட்டம் யாது?

5. ஆதிவழியாகச் சென்று $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ என்ற வட்டங்களை செங்குத்

தாக வெட்டும் வட்டம் யாது? அந்த வட்டத்தின் மையம் கொடுத்த வட்டங்களின் ச. அச்சில் உள்ளது என்றும் நிறுவுக. (B. E. 63, '62)

6. $x^2+y^2+2x+8=0$, $x^2+y^2-8x+8=0$ என்ற வட்டங்களுக்குச் செங்குத்தாயும் $x+y-4=0$ என்ற கோட்டைத் தொடுவதுமான வட்டம் யாது? (B. E. '60)

7. $x^2+y^2=9$ என்ற வட்டப் பரிதியை இரு சமமாக வெட்டிக்கொண்டும் $x^2+y^2-2x+8y-4=0$ என்ற வட்டத்திற்கு செங்குத்தாகவும் $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டம் எது?

8. $x^2+y^2-4x+6y+8=0$,

$x^2+y^2-10x-6y+14=0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என்று காண்பிக்கவும். தொடு புள்ளியையும் காண்க.

9. $x^2+y^2-6x-9y+13=0$,

$x^2+y^2-2x-16y=0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று தொடுகின்றன என்று காண்பிக்கவும். தொடு புள்ளி காண்க. (B. Tech. '69)

10. கொடுத்துள்ள இரு வட்டங்களை எப்போதும்

$x^2+y^2+2g_1x+c=0$, $x^2+y^2+2g_2x+c=0$ என்று எழுத முடியும் என்று நிறுவுக. (B. E. '65)

11. $x^2+y^2+2ax+c=0$, $x^2+y^2+2by+c=0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால் $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ என்று நிறுவுக.

12. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ என்ற விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் சென்று $x+2y=5$ என்ற கோட்டைத் தொடும் வட்டம் யாது?

13. $x^2+y^2-5x-2y+8=0$,

$x^2+y^2-3x-y+6=0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும் $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டம் யாது?

14. கணக்கு (13)-ல் கொடுத்த வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் ஆரம் $2\sqrt{2}$-ம் உள்ளதுமான வட்டங்களின் சமன்பாடு யாவை?

15. கீழ்வரும் வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது? பொது நாணின் நீளத்தையும் காண்க.

(a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 44 = 0;$
$x^2 + y^2 + 10x - 20y + 76 = 0$ (B. E. '73)

(b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0,$
$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$

(c) $(x - a)^2 + y^2 = a^2;\ x^2 + (y - b)^2 = b^2$

(d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0;$
$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

16. $2x + 3y = 1$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்டத்தை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB-யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0$ என்று காண்பிக்கவும். மேற்படி இரண்டு வட்டங்கள் α கோணத்தில் வெட்டிக் கொண்டால் $\cos\alpha$ காண்க. (B. Tech. '68)

17. $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0,\ x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$ என்னும் இரு வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம்

$$2\sqrt{\frac{(\lambda^2 - c)(\mu^2 + c)}{\lambda^2 + \mu^2}}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

18. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் ஒரு நாண் $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. இந்த நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2p(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$$

என்று காண்பிக்கவும்.

19. கீழ்வரும் மூன்று வட்டங்களின் சமத் தொடுகோட்டு சந்தி (radical centre) காண். மேலும் அந்த மூன்று வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டம் யாது?

(a) $x^2 + y^2 - 16 = 0,\ x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 14y + 52 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0,$

$2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 9 = 0$

$x^2 + y^2 + y = 0$ (B. E. '62)

20. கீழ்வரும் இரண்டு வட்டங்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ச. அச்சு, எல்லைப் புள்ளிகள் காண்க.

(a) $x^2 + y^2 - 16x - 6y + 4 = 0,$

$x^2 + y^2 + 4 = 4y + 12x$ (B. Tech. '71)

(b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 4 = 0,$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ (B. E. '61)

(c) $x^2 + y^2 + 20x - 12y = 0$

$x^2 + y^2 - 16x - 3y + 45 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$

$2x^2 + 2y^2 - x - y + 1 = 0$

(e) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0,$

$2x^2 + 2y^2 - 10y + 5 = 0$

(f) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$

$x^2 + y^2 - 30x - 24y + 41 = 0$

(g) $x^2 + y^2 + 5x + y + 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 10x + y + 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 10x - 4y - 1 = 0$ (B. E. '63)

21. $(1, 2)$ என்ற புள்ளிவழியாகச் செல்வதும்

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y = 7,\ x^2 + y^2 + 3x = 2y + 1$$

ஆகிய வட்டங்களுடன் ஒரே சமத்தொடு அச்சு உடையதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. (B. Tech. '72)

22. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$ என்ற வட்டத்தை ஓர் உறுப்பாகக் கொண்ட ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஓர் எல்லைப் புள்ளி $(0, -3)$ என்றால் மற்ற எல்லைப் புள்ளியையும் சமத்தொடு அச்சையும் காண்க. (B. Tech. '72, B. E. '60)

23. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஒரு உறுப்பு $x^2 + y^2 - 18y + 29 = 0$. ஓர் எல்லைப் புள்ளி $(1, 4)$ என்றால் மற்ற எல்லைப் புள்ளி யாது ?

24. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஓர் உறுப்பு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. ஓர் எல்லைப் புள்ளி ஆதி என்றால், மற்ற எல்லைப் புள்ளி $\left(\frac{-gc}{g^2 + f^2}, \frac{-fc}{g^2 + f^2}\right)$ என்று நிறுவுக.

25. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகள் $(3, 1)$, $(-1, 5)$ என்றால் அந்த பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியையும், அதன் சமத்தொடு அச்சையும் காண்க.

26. $(0, 0)$, (a, b) என்ற புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாக உள்ள ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + k\,(2ax + 2by - a^2 - b^2) = 0$$

என நிறுவுக.

27. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 45 = 0$ என்ற வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீள விகிதம் $3 : 4$ என்றால் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை கொடுத்த வட்டங்களுடன் ஒரே சமத்தொடு அச்சுடைய ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.

28 ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் மூன்று வட்டங்களின் மையங்கள் A, B, C. ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவைகளுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3 என்றால்,

$$BC \cdot t_1{}^2 + CA \cdot t_2{}^2 + AB \cdot t^3 = 0$$

என நிறுவுக.

29. ஒரு பொது வச்சு வட்டத் தொகுதியின் இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடு அந்தத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒரு செங்கோணத்தில் எதிர் கொள்ளும் என நிறுவுக.

30. இரண்டு வட்டங்களின் இரண்டு நாண்கள் அவைகளின் (வட்டங்களின்) சமத்தொடு அச்சில் வெட்டுகின்றன. அந்த நாண்களின் நான்கு முனைப்புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின்மேல் அமையும் என நிறுவுக. (B. E. '69)

விடைகள்

1. (அ) $3x + 4y = 57,\ 4x - 3x = 26,$

$7x - 24y = 233,\ 24x + 7y = 156$

(ஆ) $x = 0,\ 3x + 4y = 10,$

$3x^2 + 8xy - 12y^2 - 46x + 60y - 36 = 0$

(இ) $y - 4 = 0,\ 3y - 4x + 2 = 0$ (இவைகள் நேர் பொதுத் தொடுகோடுகள். குறுக்குப்பொது தொடுகள் இல்லை)

2. (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 3y - 14 = 0$

4. $3x^2 + 3y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$

5. $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$

6. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

7. $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0,$ 8. $(3, -1)$

9. $(5, 1)$ 12. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

13. $x^2 + y^2 - 9x - 4y + 12 = 0$

14. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 12 = 0,$

$5x^2 + 5y^2 + 4x - 8y - 36 = 0$

15. (a) $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 16 = 0;\ 2\sqrt{6}$

(b) $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0;\ 2\sqrt{2}$

(c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) - 2ab(bx+ay) = 0;\ \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(d) $5x^2 + 5y^2 - 8x - 16y + 12 = 0;\ 4/\sqrt{5}$

19. (a) $(4, -6)$; $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 16 = 0$

(b) $(-2, -1)$; $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

20. (a) $2x + y = 0$; $(2, 0), \left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

(b) $4x + 2y - 1 = 0$; $(-1, +1), \left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$

(c) $4x + y - 5 = 0$; $(6, 2), (-2, 4)$

(d) $x + y - 1 = 0$, $(0, 0), (1, 1)$

(e) $4x - 2y - 5 =$; $(1, 2), (3, 1)$

(f) $5x + 4y = 0$; $(3, 4), (-5, -4)$

(g) $x - y - 1 = 0$; $(0, -3), (-2, -1)$

21. $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 5 = 0$

22. $(-2, -1)$, $x - y - 1 = 0$ 23. $(2, -1)$

25. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 + \lambda(x - y + 2)$;
$x - y + 2 = 0$.

துணை அதிகாரம் 6.

பரவளைவு
(Parabola)

§ 57. கூம்பு வளைவு (அல்லது இருபடி வரை) (Conic or conic section)

S என்பது கொடுத்த ஒரு நிலையான புள்ளி (fixed point), l என்பது கொடுத்த ஒரு நிலையான கோடு (fixed st. line) S-லிருந்து P என்ற புள்ளியின் தூரமும் P-யிலிருந்து l-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரமும் $e : 1$ என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-யின் நியமப்பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு அல்லது இருபடி வரை என்று கூறுவர்.

நிலையான புள்ளி S, நிலையான கோடு l ஆகியவற்றை முறையே குவியம் (focus), இயக்குவரை (directrix) என்று கூறுவர். e என்ற விகித எண்ணுக்கு மையவகற்சி (eccentricity) என்று பெயர்.

$e = 1$ என்றால் கூம்பு வளைவுக்கு பரவளைவு (parabola) என்று பெயர்.

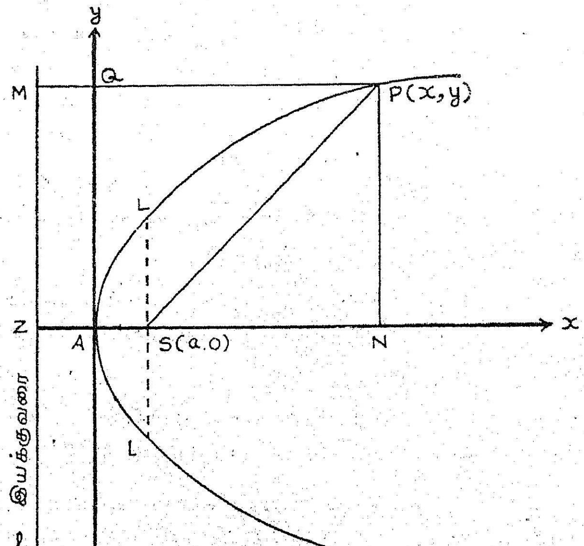
$e < 1$ என்றால் கூம்பு வளைவுக்கு நீள் வட்டம் (ellipse) என்று பெயர்.

$e > 1$ என்றால் கூம்பு வளைவுக்கு அதிபரவளைவு (hyperbola) என்று பெயர்.

$e = \sqrt{2}$ என்றால் அதிபரவளைவுக்கு செவ்வக அதிபரவளைவு (rectangular hyperbola).

§ 58. நியம வடிவத்தில் பரவளைவின் சமன்பாடு (Standard equation of the parabola)

S என்ற குவியம், l என்ற இயக்குவரை (directrix) கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இயக்கு வரைக்கு ⊥ ஆக SZ வரைக. SZ-ன் நடுப் புள்ளி A என்போம். $\dfrac{SA}{AZ} = 1$ என்பதால் பரவளைவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி A ஆகும் (படம் 49).



படம் 49.

A-யை ஆதியாகவும் AS-ஐ x-அச்சாகவும் AY என்ற குத்துக் கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க.

$SZ = 2a$ என்போம். அதனால் $AS = a = AZ$

$\therefore$ S-ன் ஆ. தொ. $(a, 0)$ ஆகும்.

$P(x, y)$ என்பது பரவளைவின்மேல் உள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்போம். இயக்கு வரைக்கு $\perp$ ஆக PM வரைக. $AN = x$, $NP = y$

பரவளைவின் வரைவிலக்கணப்படி $\frac{SP}{PM} = \frac{e}{1} = \frac{1}{1}$

$\therefore$ $SP^2 = PM^2$

அதாவது $SP^2 = NZ^2 = (AN + AZ)^2$

அதாவது $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x + a)^2$

அதாவது $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + ax + a^2$

அதாவது $y^2 = 4ax$

குறிப்பு: 1. இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x + a = 0$ ஆகும்.

2. பரவளையின் சமன்பாட்டில் y-க்குப் பதிலாக $-y$ இட்டாலும் மேற்படி சமன்பாடு மாறுவதில்லை. எனவே பரவளைவு x-அச்சுக்கு சமச் சீருள்ளது (symmetrical about the x-axis). எனவே x-அச்சு, மேற்படி பரவளைவின் சமச்சீர் அச்சு ஆகும்.

3. $y^2 = 4ax$-ல் x எதிர்க்குறி (அதாவது) $(-)$ என்றால் y கற்பனை எண்ணாகும். எனவே, பரவளைவு y-அச்சுக்கு வலப் புறத்தில் உள்ளது.

4. $x = 0$ என்றால், $y = 0, 0$. எனவே y-அச்சு மேற்படி பரவளைவை ஆதியில் தொடுகிறது ஆதியை பரவளைவின் உச்சி என்று கூறுவர்.

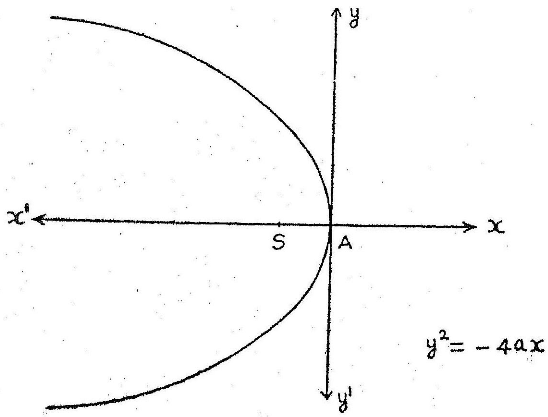
5. $x \to \infty$ என்றால், $y \to \infty$. எனவே, பரவளைவு மூடிய வளைகோடு அல்ல (parabola is not a closed curve).

6. குவியத்திலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் நிலைத் தூரம (ordinate at the focus) SL-ஐ அரைச் செவ்வகலம் (semi-latus rectum) என்றும் $LL' = 2\,SL$-ஐச் செவ்வகலம் (latus rectum) என்றும் கூறுவர்.

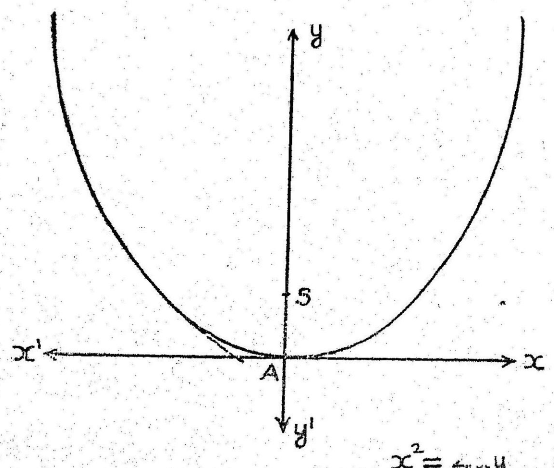
7. $y^2 = 4ax$ என்பதற்குப் பின்வருமாறு விளக்கம் கூறலாம்.

y என்பது பரவளைவின் அச்சிலிருந்து $P(x, y)$ என்ற புள்ளி யின் செங்குத்துத் தூரம் NP-யைக் குறிககிறது. x என்பது உச்சி யில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிலிருந்து P-யின் தூரம் PQ-வைக் குறிக்கிறது. மேலும் $4a$ = செவ்வகலம். எனவே, பரவளையின் சமன்பாடு : NP^2 = செவ்வகலம் $\times PQ$.

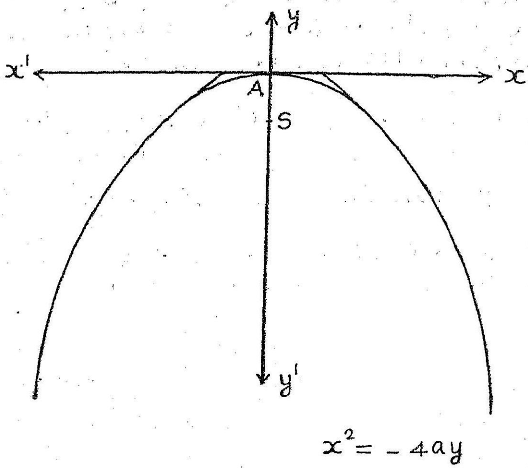
8. $y^2 = -4ax$, $x^2 = 4ay$, $x^2 = -4ay$ என்பவை களும் பரவளைவுகளே, அவைகளின் வடிவம் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



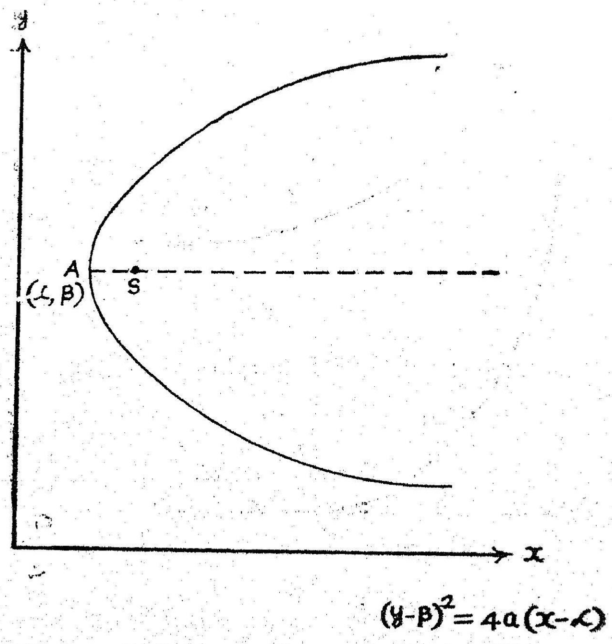
படம் 50 (a)



படம் 50 (b)



படம் 50 (c)

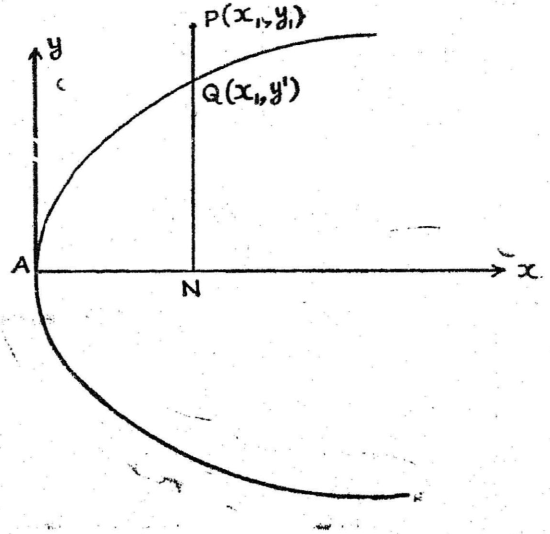


படம் 51.

9. ஆதியை (α, β) என்ற புள்ளிக்கு மாற்றினுல் $y^2 = 4ax$ என்பது $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ என மாறும். எனவே இதன் உச்சி (α, β), குவியம் $(\alpha + a, \beta)$ ஆகும்.

§ 59. கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவைக் குறித்து அமையும் நிலை (position of the pt. $P(x_1, y_1)$ *w. r. t.* the parabola $y^2 = 4ax$)

$P(x_1, y_1)$-லிருந்து x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PN வரைக அது பரவளைவை $Q(x_1, y')$-ல் வெட்டட்டும் (படம் 52).



படம் 52.

$Q(x, y')$ பரவளைவின்மேல் ஒரு புள்ளி என்பதால்

$$(y')^2 = 4ax_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி மேற்படி பரவளைவின் வெளியே, மேலே அல்லது உள்ளே இருந்தால்

முறையே $NP^2 \gtreqless NQ$

அதாவது $y_1^2 \gtreqless (y')^2$

அதாவது $y_1^2 \gtreqless 4ax_1$ [சமன்பாடு (1)]

அதாவது $y_1^2 - 4ax_1 \gtreqless 0$

அதாவது $S_{11} \gtreqless 0$

(இங்கே $S \equiv y^2 - 4ax$-ஐக் குறிக்கிறது)

§ 60. குறியீடுகள்.

இந்தத் துணை அதிகாரத்தில் பின்வரும் குறியீடுகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

$S \equiv y^2 - 4ax$ என்றால்

$S_1 \equiv yy_1 - 2a(x + x_1)$

$S_2 \equiv yy_2 - 2a(x + x_2)$

$S_{12} = y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2)$

$S_{11} = y_1^2 - 4ax_1$

பின்பு $L \equiv lx + my + n$ என்றால்

$L_1 \equiv lx_1 + my_1 + n$

§ 61. $S \equiv y^2 - 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் உள்ள $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடு

$$y^2 = 4ax$$

$$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

அதாவது $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y}$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= \dfrac{2a}{y_1}$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி $y^2 = 4ax$-ன்மேல் உள்ளது

எனவே $y_1^2 = 4ax_1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$

$(1) + (2);\quad yy_1 = 2ax + 2ax_1$

அதாவது $yy - 2a(x + x_1) = 0$

அதாவது $S_1 = 0$

§62. $L \equiv lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவின் தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை

$L = 0$ என்ற கோடு $S = 0$-வை $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடட்டும். பின் அந்தத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு (§61)

$$S \equiv yy_1 - 2a(x + x_1) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும்.

ஆனால் $L \equiv lx + my + n = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$

அந்தத் தொடுகோடு என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

∴ (1)-ம் (2)-ம் ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும். அதனால் ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்கள் விகித சமத்தில் இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\dfrac{-2a}{l} = \dfrac{y_1}{m} = \dfrac{-2ax_1}{n}$

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{n}{l},\ y_1 = \dfrac{-2am}{l}$

ஆனால் இந்தப் புள்ளி $\left(\dfrac{n}{l}, \dfrac{-2am}{l}\right)$ $L = 0$ என்ற கோட்டில் உள்ளது.

$$\therefore \quad l\left(\frac{n}{l}\right) + m\left(\frac{-2am}{l}\right) + n = 0$$

$$-2am^2 + 2ln = 0$$

அதாவது $L = 0$ தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை $am^2 = ln$

மேலும் தொடுபுள்ளி $\left(\dfrac{n}{l}, \dfrac{-2am}{l}\right)$

குறிப்பு : 1. $y = mx + c$ என்பது $y^2 - 4ax = 0$-வின் தொடுகோடு என்றால் $c = \dfrac{a}{m}$

தொடுபுள்ளி $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$

2. m-ன் மதிப்பு எதுவானாலும் $y = mx + \frac{a}{m}$ என்பது $y^2 = 4ax$-ன் தொடுகோடு ஆகும்.

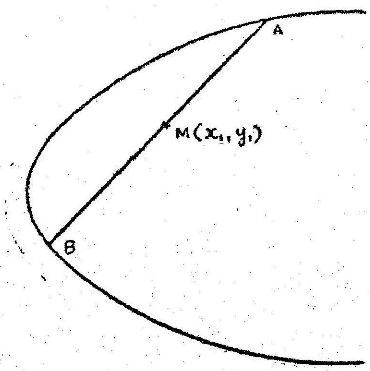
§ 63. $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவுக்கு $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் தொடுநாண்

§ 35-ல் விளக்கியதுபோல் தொடு நாணின் சமன்பாடு $S_1 = 0$ ஆகும்.

§ 64. $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $S_1 = 0$ ஆகும்.

விளக்கத்திற்கு § 37-ஐக் காண்க.

§ 65. $M(x_1, y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவின் நாண்.



படம் 53.

AB என்பது $M(x_1, y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாக உடைய நாண் என்போம். அதன் சரிவு $\tan\theta$ என்றால் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இங்கே r என்பது $M(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வெக்டர் தூரத்தைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, மேற்படி நாணின்மேல் உள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$ என்று குறிக்கலாம்.

இந்தப்புள்ளி A அல்லது B-யைக் குறித்தால், அதன் ஆ தொ. $S = 0$-வைச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

அதாவது $(y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 + r\cos\theta)$

அதாவது $r^2\sin^2\theta + 2r(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)$
$$+ (y_1^2 - 4ax_1) = 0 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் r-ன் மூலங்கள் வெக்டர் $\vec{MA}$, $\vec{MB}$-களைக் குறிக்கும்.

ஆனால் $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$

எனவே (2)-ன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 0$

அதாவது r-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $y_1\sin\theta = 2a\cos\theta$

அதாவது $\tan\theta = \dfrac{2a}{y_1}$ = நாணின் சரிவு

இதை (1)-ல் பயன்படுத்தினால் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2a}{y_1}$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

அல்லது $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$

இருபுறத்திலும் $-2ax_1$-ஐக் கூட்டினால்

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

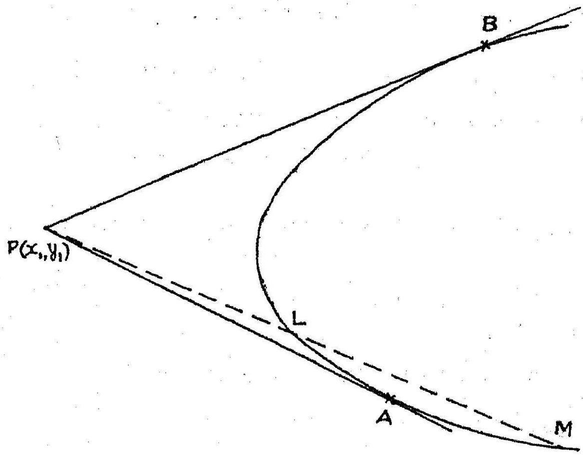
அல்லது $S_1 = S_{11}$

§ 66. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவிற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$S \equiv y^2 - 4ax = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$P(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லும் ஏதேனும் ஒரு நேர்கோடு PLM-ன் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$



படம் 54.

இதில் $\tan\theta$ என்பது அந்தக் கோட்டின் சரிவையும், r என்பது $P(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வெக்டர் தூரத்தையும் குறிக்கும்.

(2)-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ எனக் குறிக்கலாம்.

இந்தப் புள்ளி $S = 0$-வின்மேல் இருந்தால் (அதாவது இந்தப் புள்ளி L அல்லது M ஆனால்) அதன் ஆ. தொ. $S = 0$-வைச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

$$\therefore \quad (y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 + r\cos\theta)$$

அதாவது $r^2\sin^2\theta + 2r(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)$

$$+ (y_1^2 - 4ax_1) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

(3)-ன் மூலங்கள் வெக்டர் $\vec{PL}, \vec{PM}$-களைக் குறிக்கும். ஆனால் சமன்பாடு (2) ஒரு தொடுகோடு ஆகும்போது $\vec{PL}, \vec{PM}$ ஆகியவை சமமாகி தொடுகோடு PA அல்லது PB-யுடன் ஒன்றிவிடும்.

இதற்கான நிபந்தனை : தன்மை காட்டி $= 0$

(அதாவது discriminant $= 0$)

$\therefore \quad (y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta)^2 = 4\sin^2\theta\,(y_1^2 - 4ax_1)$

அதாவது $(y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta)^2\ 4\sin^2\theta \cdot S_{11})$ ... (4)

(4)-லிருந்து $\tan\theta$-வைப் பெற்று (2)-ல் பிரதியிட்டு, வேண்டிய சமன்பாடு காணலாம். அல்லது (2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து θ-வை நீக்கிவிட்டும் நாம் விரும்பும் சமன்பாடு காண முடியும். பிந்திய முறை எளிதாகையால் அதைக் கையாள்வோம்.

(2)-லிருந்து $\cos\theta$, $\sin\theta$ ஆகியவற்றைப் பெற்று (4)-ல் பிரதியிட்டால்

$$\left[y_1\left(\frac{y-y_1}{r}\right) - 2a\left(\frac{x-x_1}{r}\right)\right]^2 = \left(\frac{y-y_1}{r}\right)^2 \cdot S_{11}$$

அதாவது $[y_1(y-y_1) - 2a(x-x_1)]^2 = (y-y)^2\, S_{11}$

அதாவது $[yy_1 - 2ax - y_1^2 + 2ax_1]^2 = (y^2 - 2yy_1 + y_1^2)\, S_{11}$

அதாவது $(S_1 - S_{11})^2 = (S - 2S_1 + S_{11})\, S_{11}$

$\therefore \quad S_1 = SS_{11}$

அதாவது $[yy_1 - 2a(x+x_1)]^2 = (y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1)$

§67. பரவளைவின் விட்டம் (Diameter of a parabola)

ஒரு பரவளைவின் சமாந்திர நாண் தொகுதியை (system of parallel chords) இரு சம கூறுக்கும் நேர்கோட்டுக்கு **விட்டம்** என்று பெயர்.

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற கோட்டுக்கு இணையாக உள்ள ஒரு பரவளைவின் நாணின் நடுப்புள்ளி $M(x_1, y_1)$ என்போம்.

அதன் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$ ஆகும்.

அதாவது $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax$ ... (2)

(2)-ம் (1)-ம் இணையென்றால் சரிவுகள் சமம்

அதாவது $\frac{2a}{y_1} = m$

அதாவது $y_1 = \frac{2a}{m}$

$\therefore$ $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை $y = \frac{2a}{m}$

இது பரவளையின் அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எனவே, பரவளைவின் அச்சுக்கு இணையான எல்லாக் கோடுகளும் அதன் விட்டங்கள் ஆகும். அதன் அச்சு தலையாய விட்டம் (principal diameter) ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

குவியம் $(3, -4)$, இயக்குவரை $x + y + 7 = 0$ உள்ள பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

பரவளைவின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ லிருந்து இயக்குவரைக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$PM = \frac{x_1 + y_1 + 7}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x_1 + y_1 + 7}{\sqrt{2}}$$

$P(x_1, y_1)$-லிருந்து குவியம் $S(3, -4)$ வரை உள்ள தூரம்

$$= SP = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2}$$

பரவளைவின் வரைவிலக்கணப்படி $SP^2 = PM^2$

அதாவது $(x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2 = \left(\frac{x_1 + y_1 + 7}{\sqrt{2}}\right)^2$

எனவே $P(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை (கீழ்க்குறி 1-ஐ நீக்கினுல்)

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 47 + 2xy + 14x + 14y$$

அதாவது பரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2xy - 26x + 2y + 1 = 0$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

ஒரு பரவளைவின் அச்சு $3x + 4y + 6 = 0$, அதன் உச்சி $(-2, 0)$, செவ்வகலம் 4 என்றால் அந்தப் பரவளைவின் சமன்பாடு யாது ?

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி அதாவது பரவளைவின்மேல் இருக்கட்டும். பரவளைவின் அச்சிலிருந்து P-யின் தூரம்,

$$PN = \frac{3x_1 + 4y_1 + 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

அச்சின் சரிவு $= -\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ அச்சுக்குச் செங்குத்துக் கோட்டின் சரிவு $= \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ உச்சியில் தொடும் தொடுகோடு

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x + 2)$$

அதாவது $4x - 3y + 8 = 0$

இந்தத் தொடுகோட்டிலிருந்து $P(x_1, y_1)$-ன் தூரம்,

$$PQ = \frac{4x_1 - 3y_1 + 8}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

P என்பது பரவளைவின்மேல் இருப்பதால்,

$$PN^2 = \text{செவ்வகலம்} \times PQ$$

அதாவது $$\left(\frac{3x_1 + 4y_1 + 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right)^2 = 4\left(\frac{4x_1 - 3y_1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right)$$

$\therefore$ P-யின் நியமப்பாதை அதாவது பரவளைவின் சமன்பாடு

$$(3x + 4y + 6)^2 = 20(4x - 3y + 8)$$

அதாவது $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 44x + 108y - 124 = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ என்பது ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு என்றால் அதன் உச்சி, அச்சு செவ்வகலம், குவியம், இயக்குவரை காண்க. (B. E. '60)

கொடுத்த சமன்பாடு $3x^2 - 9x = 5y + 2$

அதாவது $3\left[x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right] = 5y + 2 + \frac{27}{4} = 5y + \frac{35}{4}$

அதாவது $3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{35}{4}$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(y + \frac{7}{4}\right) \qquad \ldots \qquad (1)$$

ஆதியை $A\left(\frac{3}{2}, \frac{-7}{4}\right)$-க்கு மாற்றி, (X, Y)-ஐ நடப்பு ஆ. தொ. என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$x = \frac{3}{2} + X, \quad y = -\frac{-7}{4} + Y$$

மேலும் சமன்பாடு (1) பின்வரும் வடிவம் பெறும்

$$X^2 = \frac{5}{3} Y \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

இந்தப் பரவளைவின் உச்சி $X = 0, Y = 0$ அல்லது பழைய குறியீட்டச்சில் (co-ordinate axes)

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{-7}{4}$$

மேலும் பரவளைவின் அச்சு $X = 0$

அதாவது பழைய குறியீட்டச்சில் $x = \frac{3}{2}$

இதன் செவ்வகலம் $= \frac{5}{3} = 4a$

குவியம் $X = 0, Y = a = \frac{5}{12}$

அதாவது $x = \frac{3}{2}, y = \frac{-4}{3}$

இயக்குவரை $Y + a = 0$

அதாவது $y + \frac{7}{4} + \frac{5}{12} = 0$ அதாவது $y + \frac{13}{6} = 0$.

எனவே கொடுத்த பரவளைவின் உச்சி $\left(\frac{3}{2}, \frac{-7}{4}\right)$, அச்சு $x = \frac{3}{2}$, செவ்வகலம் $= \frac{5}{3}$, குவியம் $\left(\frac{3}{2}, \frac{-4}{3}\right)$, இயக்கு வரை $y + \frac{13}{6} = 0$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 4.

ஒரு பரவளைவின் நாண்கள் உச்சியில் 90° கோணத்தில் எதிர் கொள்ளுகின்றன. அவைகளின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப் பாதை அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு கோடு என நிறுவுக.

பரவளைவு $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ என்போம்.

QR என்ற நாணின் இசைப்புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்றால் P-யின் இசைக்கோடு QR ஆகும். எனவே, QR-ன் சமன்பாடு $S_1 = 0$

அதாவது $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$ ... ... (1)

A என்பது பரவளைவின் உச்சி என்றால், AQ, AR இவைகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண, $S = 0$-வை (1)-ன் உதவியுடன் சமபடித்தானதாக்க வேண்டும். அப்படிச் செய்தால் AQ, AR-களின் சமன்பாடு

$$y^2 - 4ax\left(\frac{yy_1 - 2ax}{2ax_1}\right) = 0$$

அதாவது $4ax^2 - 2y_1xy + x_1y^2 = 0$

ஆனால் AQ, AR செங்குத்துக் கோடுகள்

$\therefore$ x^2-ன் குணகம் $+$ y^2-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $4a + x_1 = 0$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$-ன் நியமப் பாதை $x + 4a = 0$

§ 68. பரவளைவின் துணையலகுக் கூறுகள் (Parametric co-ordinates of a Porabola)

$y^2 = 4ax$ என்ற சமன்பாட்டில், $x = at^2$, $y = 2at$ என்று பிரதியிட்டால், t-ன் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும் $(2at)^2 = 4a(t^2)$ என்பது சர்வசமனாகிறது. எனவே, $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளி

எப்போதும் $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் அமைந்திருக்கும். இதில் t என்ற ஒரு மாறிதான் (variable) உள்ளது. இதற்குத் துணையலகு (parameter) என்று பெயர். இந்தத் துணையலகு $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை மதிப்புகளைப் பெற்ருல், பரவளைவின் எல்லாப் புள்ளிகளும் கிடைத்துவிடும்.

எனவே, $x = at^2$, $y = 2at$ என்பதைப் பரவளைவின் துணையலகுச் சமன்பாடு என்று கூறுகிறோம்.

சாதாரணமாக (x_1, y_1) என்று ஒரு புள்ளியின் ஆ. தொலைகளைக் குறிப்பிட்டால் இதில் இரண்டு தெரியாக் கணியங்கள் (unknown quantities) உள்ளன. ஆனல் $(at^2, 2at)$ என்பதில் t என்ற துணையலகுதான் தெரியாக் கணியம். ஆகவே, துணையலகைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகளைச் செய்யும்போது ஒரு தெரியாக் கணியம் குறையும். அதேபோல் ஒரு சமன்பாடும் குறையும். எனவே கணக்கு செய்வதும் சிறிது எளிதாகும்.

இனி வருவனவற்றில் $(at^2, 2at)$ என்பதற்குப் பதிலாக 't' என்ற புள்ளி என சுருக்கமாக எழுதுவோம். அதேபோல் புள்ளிகள் 't_1', 't_2' என்ருல் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என பொருள் கொள்ளவேண்டும்.

§ 69. $P(t_1)$, $Q(t_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண்

$$PQ\text{-வின் சரிவு} = \frac{2at_1 - 2at_2}{at_1^2 - at_2^2} = \frac{2}{t_1+t_2}$$

$$\therefore \quad PQ\text{-வின் சமன்பாடு} \quad y - 2at_1 = \frac{2}{t_1+t_2}(x - at_1^2)$$

$$y(t_1 + t_2) - 2at_1(t_1 + t_2) = 2x - 2at_1^2$$

$$\text{அதாவது} \quad y(t_1 + t_2) - 2x = 2at_1t_2$$

§ 70. $P(t)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு

§ 69-ல் $t_1 = t_2 = t$ எனப் பிரதியிட்டால் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\text{அதாவது} \quad 2yt - 2x = 2at^2$$

$$\text{அதாவது} \quad yt - x = at^2$$

மாற்று வழி :

$$x = at^2 \quad y = 2at$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

அதாவது தொடுகோட்டின் சரிவு $= \frac{1}{t}$

ஆகவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

அதாவது $yt - x = at^2$

குறிப்பு : $y = mx + \frac{a}{m}$ என்பது எப்போதும் பரவளேவின் தொடுகோடு ஆகும் என்று § 62-ல் பார்த்தோம். இப்போது $y = \frac{1}{t} + at$ என்பதும் எப்போதும் பரவளேவின் தொடுகோடு என்றும் நிறுவியிருக்கிறோம். எனவே, $m = \frac{1}{t}$ அல்லது $t = \frac{1}{m}$ என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது பாவளேவின் துணையலகு **t என்பது, சரிவின் தலைகீழ்க் கணியம் ஆகும்** (Paramater t is the reciprocal of the slope).

§ 78. *P (t)* **என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு** [Normal at the point *P (t)*]

தொடுகோட்டின் சரிவு $= \frac{1}{t}$

$\therefore$ வரைச் செங்கோட்டின் சரிவு $= -t$

$\therefore$ $at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

அதாவது $y + xt = 2at\ at^3$

§71. 't_1' 't_2' என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி

மேற்படி தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$yt_1 - x = at_1^2$$
$$yt_2 - x = at_2^2$$

இவைகளின் தீர்வு காணில் நாம் விரும்பிய சந்திப்புப் புள்ளியின் ஆ. தொ. கிடைக்கும்.

எனவே தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$x = at_1t_2,\ y = a(t_1 - t_2)$$

§ 72. 't_1' 't_2' என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி

மேற்படி வரைச் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3$$

$$\therefore \quad x(t_1 - t_2) = 2a(t_1 - t_2) + a(t_1^3 - t_2^3)$$

$t_1 \pm t_2$; $\quad \therefore \quad x = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)$

மேலும் $y = -at_1t_2(t_1 + t_2)$

ஆகவே வரைச் செங்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி

$$x = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) = 2a + a[(t_1 + t_2)_2 - t_1 - t_2]$$

$$y = -at_1t_2(t_1 + t_2)$$

குறிப்பு : § 69 முதல் § 72 வரை கிடைத்துள்ள சூத்திரங்களை நினைவில் கொள்வது அவசியம்.

§ 73. பரவளைவின் சிறப்புப் பண்புகள் (Special properties of a parabola)

பரவளைவின் சிறப்புப் பண்புகளை அறிய $x = at^2$, $y = 2at$ என்ற துணையலகுச் சமன்பாடு பயன்படுத்துவது நன்மை பயக்கும்.

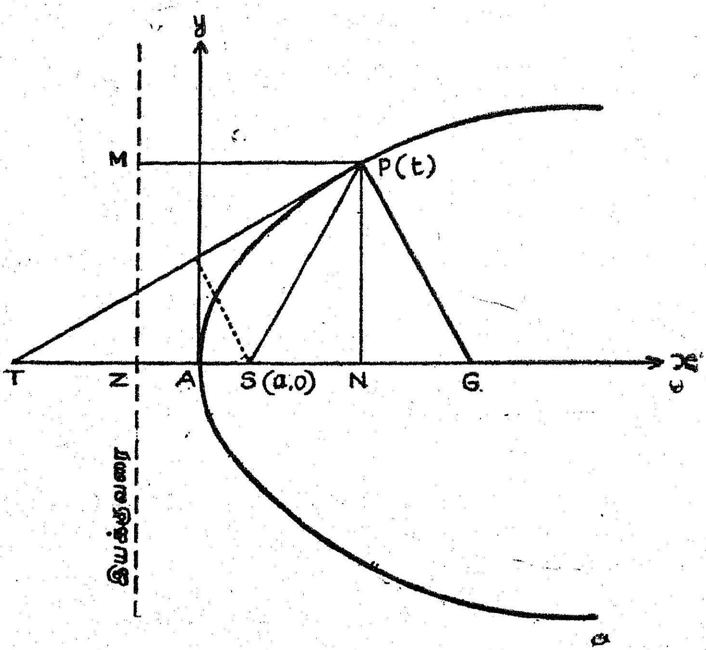
படத்தில் (படம் 55) $P(at^2, 2at)$ என்பது பரவளைவின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

AN = P-யின் கிடைத்தூரம் (abscissa) $= at^2$

NP = P-யின் நிலைத்தூரம் (ordinate) $= 2at$

PT = என்பது P-யில் தொடும் தொடுகோடு. அது x-அச்சை (அதாவது பரவளைவின் அச்சை) T-யில் வெட்டுகிறது.

PG என்பது P-யில் வரைச் செங்கோடு. அது அச்சை G-யில் வெட்டுகிறது.



படம் 55.

PN = PT-யின் குத்து வீச்சு (orthogonal projection)
= தொடுகோட்டடி (subtangent)

NG = PG-யின் குத்து வீச்சு
= வரைச் செங்கோட்டடி (subnormal)

ZM = என்பது இயக்குவரை (directrix)

AY = என்பது உச்சியில் தொடும் தொடுகோடு. y-அச்சுவும் அதேயாகும்.

§ 73·1. உச்சியானது தொடுகோட்டடியின் நடுப்புள்ளியாகும்

PT-யின் சமன்பாடு $yt - x = at^2$

இதை x-அச்சுடன் (அதாவது $y = 0$) தீர்வு காணில்,

$$-x = at^2$$

எனவே, $T(-at^2, 0)$ ஆகும்.

மேலும், $N(at^2, 0)$ ஆகும்.

$\therefore$ TN-ன் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{-at^2 + at^2}{0}, 0\right) = (0, 0)$

அதாவது உச்சியான A ஆகும்.

§ 73·2. வரைச் செங்கோட்டடியின் நீளம் மாறாதது

P-யில் வரைச் செங்கோடு $y + xt = 2at + at^3$ ஆகும். இதை x-அச்சுடன் (அதாவது $y = 0$) தீர்வு காணில்

$G(2a + at^2, 0)$ ஆகும்.

அதாவது $AG = 2a + at^2$

ஆனால் $AN = at^2$

$\therefore$ வரைச் செங்கோட்டடி $NG = AG - AN = 2a =$ மாறிலி

§ 73·3. $SP = ST = SG$

பரவளைவின் வரைவிலக்கணப்படி $SP = PM$

அதாவது $SP = AN + AN = at^2 + a = a(1 + t^2)$

ஆனால் $ST = SA + AT = SA + AN = a + at^2 + a(1 + t^2)$

மேலும் $SG = AG - AS = (2a + at^2) - a = a(1 + t^2)$

$\therefore$ $SP = ST = SG$

குறிப்பு: $SP = ST$ என்பதால் $S\hat{T}P = S\hat{P}T$ அதாவது தொடுகோடு பரவளைவின் அச்சையும் P-யின் குவிய தூரத்தையும் (focal distance of P *i.e.*, SP) சமகோணத்தில் வெட்டுகிறது.

§ 73·4. S என்ற குவியத்திலிருந்து எந்த ஒரு தொடுகோட்டுக்கும் வரையும் செங்குத்தின் அடி (foot of the perpendicular) உச்சித் தொடுகோட்டில் (அதாவது y-அச்சில்) அமையும்.

(B. Tech. '66)

மேலும் $SY^2 = AS \cdot SP$

PT-யின் சரிவு $= \frac{1}{t}$

$\therefore$ SY-யின் சரிவு $= -t$

$\therefore$ SY-யின் சமன்பாடு $y - 0 = -t(x-a)$

அதாவது $y + xt = at$

PT-யின் சமன்பாடு $yt - x = at^2$

இவைகளின் தீர்வு காணில், $Y(0, at)$ ஆகும்.

இந்தப்புள்ளி y-அச்சில் அதாவது உச்சித் தொடுகோட்டில் அமைகிறது என்று தெளிவாகிறது.

மேலும் $SY^2 = (a-0)^2 + (0-at)^2 = a^2(1+t^2)$

$AS = a, \quad SP(1+t^2)$

$\therefore$ $SY^2 = AS \cdot SP.$

§ 73·5. *P-யில் தொடும் தொடுகோடு இயக்குவரையை R-ல் வெட்டினால் PR குவியத்தில் ஒரு செங்கோணத்தில் எதிர் கொள்ளும்*

PT-யின் சமன்பாடு $yt - x = at^2$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -a$ இவைகளின் தீர்வு கண்டால் $R\left[-a, \dfrac{a(t^2-1)}{t}\right]$ ஆகும்.

$$SP\text{-யின் சரிவு} = \frac{2at - 0}{at^2 - a} = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

$$SR\text{-ன் சரிவு} = \frac{a(t^2-1)/t - 0}{-a-a} = -\frac{t^2-1}{2t}$$

$\therefore$ அதாவது இரு சரிவுகளின் பெருக்கல் பலன் -1 ஆகும்.

$\therefore$ $SP \perp SR$ என்பது புலனாகிறது.

§ 73·6. செங்குத்தாக உள்ள இரு தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் வெட்டும். (B. E. '70)

தொடுகோடுகள் செங்குத்தாக இருந்தால் அவைகளின் சரிவுகளின் பெருக்கல் பலன் $= -1$ ஆகும்.

t_1, t_2 என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் முறையே $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{t_1} \times \frac{1}{t_2} = -1, \text{ அதாவது } t_1 t_2 = -1 \quad \ldots \quad (1)$$

இந்தத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (§ 71)

$x = at_1 t_2 \quad \ldots \quad (2)$; $\quad y = a(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad (3)$

(1)-ஐ (2)-ல் பயன்படுத்தினால்,

$$x = -a \text{ அல்லது } x + a = 0$$

எனவே அந்த வெட்டும் புள்ளியின் நியமப் பாதை இயக்குவரை ஆகும்.

§ 73·7. குவிய நாணின் முனைப் புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள் இயக்கு வரையில் வெட்டும் (Tangents at the extremities of a focal chord intersect on the directrix)

t_1, t_2 என்பவை குவிய நாணின் முனைப் புள்ளிகள் என்றால் அந்த நாண்

$$y(t_1 + t_2) - 2x = 2at_1 t_2$$

இது குவியம் $S(a, 0)$ வழியாகச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad 0 - 2a = 2at_1t_2$$

$$\therefore \quad t_1t_2 = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

t_1, t_2 என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுளின் சந்திப்புப் புள்ளி (x, y) என்றால்

$$x = at_1t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$y = a(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-ஐப் பயன்படுத்தினால் $x = -a$ அல்லது $x + a = 0$

அதாவது மேற்கண்ட தொடுகோடுகள் இயக்கு வரையில் வெட்டும் என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு: பண்புகள் (6)-ஐயும் (7)-ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கும்போது குவியநாணின் முனைகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இயக்கு வரையில் வெட்டுகின்றன என்று புலனாகிறது.

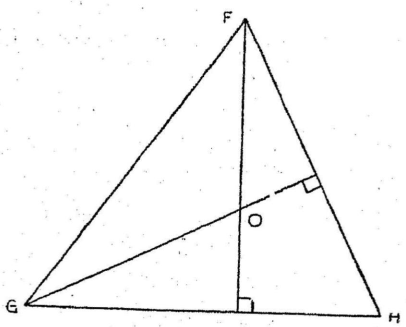
§ 73·8. t_1, t_2, t_3 என்ற புள்ளிகளில் அமையும் மூன்று (கோடுகளால் ஆகிய முக்கோணத்தின் செங்குத்து மை (orthocentre) இயக்கு வரையில் அமையும்.

அந்த தொடுகோடுகளை முறையே GH, HF, FG என்று கு பிடுவோம். அவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$yt_1 - x = at_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$yt_2 - x = at_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$yt_3 - x = at_3^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$



படம் 56.

F-ன் ஆ. தொ. $[at_2 t_3, \; a(t_2 + t_3)]$

GH-ன் சரிவு $= \dfrac{1}{t_1}$

$\therefore$ GH-ன் செங்குத்துக்கோட்டின் சரிவு $= -t_1$

$\therefore$ F வழியாக GH-க்கு $\perp$ ஆக உள்ள குத்துயாத்தின் சமன் பாடு

$$y - a(t_2 + t_3) = -t_1(x - at_2 t_3)$$

அதாவது $y + t_1 x = a(t_2 + t_3) + at_1 t_2 t_3 \quad \ldots \quad (1)$

இதேபோல் G வழியாக HF-க்குச் செங்குத்தாக உள்ள துயரத்தின் சமன்பாடு

$$y + t_2 x = a(t_3 + t_1) + at_1 t_2 t_3 \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2), ஆகிய இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிதான் நாம் ம் செங்குத்து மையம்.

இவைகளின் தீர்வு காணில் $x = -a$

அல்லது $x + a = 0$

ஆகவே செங்குத்துமையம் இயக்கு வரையில் அமைந்துள்ளது.

§ 73·9. கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு பொதுவாக மூன்று வரைச் செங்கோடுகள் வரைய முடியும். அவைகள் பரவளைவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் நிலைத் தூரங்களின் (ordinates) கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

கொடுத்துள்ள புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ என்போம்.

பரவளைவின் மேல் உள்ள $Q(t)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு $y + xt = 2at + at^3$

இது $P(\alpha, \beta)$ வழியாகச் சென்றால்,

$$\beta + \alpha t = 2at + at^3$$

அதாவது $at^3 + (2a - \alpha)t - \beta = 0$ ... ... (1)

இது t-யில் மூன்றுபடிச் சமன்பாடு ஆகும். ஆகவே t-க்கு பொதுவாக மூன்று மதிப்புகள் உண்டு. அதாவது பரவளைவின் மூன்று புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் கொடுத்த புள்ளி P வழியாகச் செல்லும்.

மேலும் சமன்பாடு (1)-ன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3 என்றால் $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ [சமன்பாட்டுக் கொள்கைப்படி]

அதாவது $2at_1 + 2at_2 + 2at_3 = 0$

அதாவது வரைச் செங்கோடுகள் பரவளைவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் நிலைத் தூரங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5.

ஒரு பரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் அதன் அச்சுக்கு θ_1, θ_2 கோணங்களில் உள்ளன. $\theta_1 + \theta_2 =$ மாறிலி என்றால் அவைகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை குவியம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு என்று காண்பிக்கவும்.

கொடுத்த தொடுகோடுளின் தொடுபுள்ளிகள் (points of contact) முறையே t_1, t_2 என்போம்.

பின்பு முதல் தொடுகோட்டின் சரிவு $= \dfrac{1}{t_1} = \tan\theta_1$

2-வது தொடுகோட்டின் சரிவு $= \dfrac{1}{t_2} = \tan\theta_2$

ஆனால் மேற்படி தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $R(x, y)$ என்றால்

$$\left.\begin{aligned} x &= at_1t_2 \\ y &= a(t_1 + t_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எடுகோள் படி $\theta_1 + \theta_2 =$ ஒரு மாறிலி

அதாவது $\tan(\theta_1 + \theta_2) = k$ (மாறிலி)

அதாவது $\dfrac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = k$

அதாவது $\dfrac{\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}}{1 - \dfrac{1}{t_1} \cdot \dfrac{1}{t_2}} = k$

அதாவது $\dfrac{t_1 + t_2}{t_1t_2 - 1} = k$

(1)-ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$\frac{y/a}{x/a - 1} = k$$

அதாவது $y = k(x - a)$

இது ஒருபடிச் சமன்பாடு மேலும் குவியம் $S(a, 0)$ இதைச் சமனடையச் செய்கிறது. எனவே, R-ன் நியமப்பாதை குவியம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு.

மாதிரிக் கணக்கு 6 :

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவுக்கு வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகள் உச்சித் தொடுகோட்டை (tangent at the vertex) Q, R என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $\triangle PQR$-ன் பரப்பு c^2 (மாறிலி) என்றால் P-யின் நியமப்பாதை $x^2(y^2 - 4ax) = 4c^4$ என்று நிறுவுக.

$P(x_1, y_1)$-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் பரவளையை $A(t_1)$, $B(t_2)$ என்ற புள்ளிகளில் தொடட்டும். இதனுல் P-யின் ஆ. தொ. $x_1 = at_1 t_2$, $y_1 = a(t_1 + t_2)$

AP-யின் சமன்பாடு $yt_1 - x = at_1^{\,2}$

இதை உச்சித் தொடுகோடு $x = O$-வுடன் தீர்வு கண்டால்

$Q(0, at_1)$ ஆகும். இதேபோல் $R(0, at_2)$ ஆகும்.

$\therefore \quad QR = a(t_1 - t_2)$. மேலும், QR என்பது y அச்சில் உள்ளது.

P-யிலிருந்து QR-க்கு வரையப்படும் குத்துயரம் (altitude)

$= P$-யின் கிடைத்தூரம்

$= at_1 t_2$

எனவே $\triangle PQR$-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} QR$. (குத்துயரம்)

$$= \frac{1}{2} a(t_1 - t_2) \cdot a t_1 t_2 = c^2 \text{ (எடுகோள்)}$$

$$\therefore \quad a^2 [(t_1+t_2)^2 - 4t_1 t_2] (at_1 t_2)^2 = 4c^4$$

ஆனல் $t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}$; $t_1 t_2 = \frac{x_1}{a}$

$$\therefore \quad a^2 \left[\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{4x_1}{a} \right] [x_1^{\,2}] = 4c^4$$

அதாவது $[y_1^{\,2} - 4ax_1) x_1^{\,2} = 4c^4$

$\therefore \quad P(x_1, y_1)$-ன் நியமப் பாதை

$$(y^2 - 4ax) x^2 = 4c^4$$

மாதிரிக் கணக்கு 7 :

ஒரு பரவளையின் இரு செங்குத்துத் தொடுகோடுகள் P-யில் சந்திக்கின்றன. அவைகளுக்கு ஒத்த (corresponding) வரைச் செங்கோடுகள் Q-வில் சந்திக்கின்றன. PQ என்ற கோடு பரவளையின் அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது என நிறுவுக. (B. Tech '72)

$A(t_1)$, $B(t_2)$ என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் $P(x_1, y_1)$-ல் சந்தித்தால்,

$$x_1 = at_1 t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$y_1 = a(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

A, B-களில் வரைச் செங்கோடுகள் $Q[x_2, y_2)$-வில் சந்தித்தால்,

$$x_2 = 2a + a[(t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2] \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_2 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

எடுகோள்படி $AP \perp BP$

$$\therefore \quad \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{t_2} = -1 \quad \text{அல்லது} \quad t_1 t_2 = -1 \quad \ldots \quad (5)$$

(1) முதல் (4) வரை உள்ள சமன்பாடுகளில் (5)-ஐப் பயன்படுத்துக.

$$x_1 = -a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1')$$

$$x_2 = 2a + a[(t + t_2)^2 + 1]$$

அல்லது $x_2 = 3a + a(t_1 + t_2)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3')$

$$y_2 = a(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4')$$

இப்போது PQ-வின் சரிவு $= \dfrac{y_2 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{a(t_1 + t_2) - a(t_1 + t_2)}{-a - 3a - a(t_1 + t_2)^2}$$

$$= 0.$$

எனவே PQ என்னும் நேர்கோடு x-அச்சு அதாவது பரவளையின் அச்சுக்கு இணையாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 8.

$P(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு மீண்டும் பரவளையை $Q(aT^2, 2aT)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டினால் $T = -t - \dfrac{2}{t}$ என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '64, '60, B. Tech. '63)

மேலும் PQ-வின் நீளத்தை t அலகில் காண்க.

P-யில் வரைச் செங்கோடு

$$y + xt = 2at + at^3 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

இது பரவளைவை $Q(aT^2, 2aT)$-யில் வெட்டுவதால் இந்த ஆ. தொ. (1)-ஐச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

$$\therefore \quad 2aT + aTt^2 = 2at + at^3$$

அதாவது $2a(T - t) = at(t^2 - T^2)$

$T \neq t$ என்பதால் $2 = -t(t + T)$

அல்லது $T = -t - \dfrac{2}{t}$

மேலும் $PQ^2 = (aT^2 - at^2)^2 + (2aT - 2at)^2$

$$= a^2(T^2 - t^2)^2 + 4a^2(T - t)^2$$

$$= a^2(T + t)^2(T - t)^2 + 4a^2(T - t)^2$$

$$= a^2(T - t)^2[(T + t)^2 + 4]$$

$$= a^2(T - t)^2\left[\left(\frac{-2}{t}\right)^2 + 4\right]$$

$$= a^2\left[-2t - \frac{2}{t}\right]^2\left[4 + \frac{4}{t^2}\right]$$

$$= 16a^2\left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 16a^2\frac{(t^2 + 1)^2}{t^2} \cdot \frac{t^2 + 1}{t^2}$$

$$= 16a^2\frac{(1 + t^2)^3}{t^4}$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{4a}{t^2}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

ஒரு பரவளையின் வரைச் செங்கோடுகள் செங்குத்தாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. P-யின் நியமப்பாதை என்ன? குவிய நாணின் முனைப் புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியும் அதே வளைகோட்டின்மேல் இருக்கும் என நிறுவுக.

முதல் பகுதி

$A(t_1)$, $B(t_2)$ என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் $P(x_1, y_1)$-ல் வெட்டட்டும். பின்பு,

$$x_1 = 2a + a[t_1 + t_2)^2 - t_1, t_2] \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y_1 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

AP, BP ஆகியவற்றின் சரிவுகள் முறையே $-t_1$, $-t_2$ ஆகும்.

$AP \perp BP$ என்பதால் $(-t_1) \cdot (-t_2) = -1$

அதாவது $t_1 t_2 = -1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(1), (2) இவைகளில் (3) ஐப் பயன்படுத்தினல்,

$$x_1 = 2a + a[(t_1+t_2)^2 + 1] = 3a + a(t_1+t_2)^2 \quad \cdots \quad (1')$$

$$y_1 = a(t_1 + t_2) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2')$$

(1′), (2′) இவைகளிலிருந்து $(t_1 + t_2)$-ஐ விலக்கினல்,

$$x_1 = 3a + a\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = 3a + \frac{y_1^2}{a}$$

அல்லது $\dfrac{y_1^2}{a} = x_1 - 3a$

எனவே $P(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை $y^2 = a(x-3a)$ ஆகும். இதுவும் ஒரு பரவளைவுதான். இதன் அச்சு $y=0$, உச்சி $(3a, 0)$, செவ்வகம் $= a$

இரண்டாம் பகுதி

$\alpha(t_1)$, $\beta(t_2)$ என்பதை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) - 2x = 2at_1 t_2$$

இந்த நாண் குவியம் $S(a, 0)$ வழியாகச் சென்றல்

$$0 - 2a = 2at_1 t_2$$

அதாவது $t_1 t_2 = -1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

α, β ஆகிய புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $Q(x_2, y_2)$ என்றால்

$$x_2 = 2a + a[(t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2] \quad \cdots \quad (5)$$

$$y_2 = -at_1 t_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

இங்கே கிடைத்துள்ள சமன்பாடுகள் (4), (5), (6) ஆகிய மூன்றும் முதல் பகுதியில் கிடைத்திருந்த (3), (1) (2) ஆகிய மூன்றும் முறையே முற்றொருமைகள். எனவே Q-வின் நியமப் பாதையும் P-யின் நியமப்பாதையும் ஒன்றேயாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 10.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் ஒரு புள்ளியில் வரைச் செங்கோடாக உள்ள நாணின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை $\dfrac{y^2}{2a} + \dfrac{4a^3}{y^2} = x - 2a$ என்று நிறுவுக.

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ என்பது நாணின் முனைப் புள்ளிகள், மற்றும் $M(x_1, y_1)$ அதன் நடுப்புள்ளி என்போம்.

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{2}(at_1^2 + at_2^2) = \frac{a}{2}[(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2] \cdots (1)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(2at_1 + 2at_2) = a(t_1 + t_2) \quad \cdots \quad (2)$$

மேலும், PQ என்பது P-யில் வரைச் செங்கோடு என்றால்,

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1} \quad [\text{மா. க. } (8)]$$

அதாவது $t_1 + t_2 = -\dfrac{2}{t_1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

அல்லது $t_1 t_2 = -t_1^2 - 2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3')$

(1), (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளில் t_1, t_2-களை விலக்கினால் நாம் விரும்பும் நியமப்பாதை கிடைக்கும்.

இப்போது (2), (3)-லிருந்து

$$y_1 = a\left(-\frac{2}{t_1}\right)$$

அதாவது $t_1 = -\frac{2a}{y_1}$ ... ... (4)

(2)-லிருந்து $t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}$ ... ... (5)

(3′), (4)-களிலிருந்து $t_1 t_2 = -t_1^2 - 2 = -\frac{4a^2}{y_1^2} - 2$ ... (6)

(5),-ஐயும் (6)-ஐயும் (1)-ல் பயன்படுத்துக.

$$x_1 = \frac{a}{2}\left[\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{8a^2}{y_1^2} + 4\right]$$

$$\therefore \quad x_1 - 2a = \frac{y_1^2}{2a} + \frac{4a^3}{y_1^2}$$

$\therefore$ $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$x - 2a = \frac{y^2}{2a} + \frac{4a^3}{y^2}$$

மாதிரிக் கணக்கு 11.

$lx + my = 1$ என்ற கோடு $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. [P, Q-களில் வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடுகள், பரவளைவின்மேல் உள்ள $\left(\frac{4am^2}{l^2}, \frac{4am}{l}\right)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் வரைச் செங்கோட்டில் வெட்டும் என காண்பிக்கவும்.

P, Q என்ற புள்ளிகளின் ஆ. தொ. முறையே $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என்போம்

மேலும் $T = \frac{2m}{l}$ என்றால் $\left(\frac{4am^2}{l^2}, \frac{4am}{l}\right)$

என்ற புள்ளியை $R(aT^2, 2aT)$ என்று குறிக்கலாம்.

P, Q என்பவை $lx + my = 1$ என்ற கோட்டிலும் உள்ளவை.

எனவே

$l \,.\, at_1^2 + m \,.\, 2at = 1$ ... ... (1)

$lat_2^2 + m \,.\, 2at_2 = 1$ ... ... (2)

(1) − (2) ; $la(t_1^2 - t_2^2) + 2am(t_1 - t_2) = 0$

$t_1 \pm t_2$ என்பதால் $t_1 + t_2 = -\frac{2m}{l}$ ... ... (3)

(1) + (2); $la[(t_1^2 + t_2^2) + 2am(t_1 + t_2) = 2$

அதாவது $la[(t_1 + t_2^2) - 2t_1t_2] + 2am(t_1 + t_2) = 2$
(3)-ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$la\left[\frac{4m^2}{l^2} - 2t_1t_2\right] + 2am\left(-\frac{2m}{l}\right) = 2$$

$$\therefore \quad t_1 t_2 = -\frac{1}{al} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

P, Q-களில் வரைச் செங்கோடுகள்

$S(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டினால்

$$x_1 = 2a + a[(t_1 + t_2)^2 - t_1t_2]$$

$$y_1 = -at_1t_2(t_1 + t_2)$$

இவைகளில் (3), (4) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துக.

பின்பு $x_1 = 2a + \frac{4am^2}{l^2} + \frac{1}{l}$ ... (5)

$$y_1 = -\frac{2m}{l^2} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (6)$$

இப்போது $R(aT^2, 2aT)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$y + xT = 2aT + aT^3$$

அதாவது $y + \frac{2mx}{l} = \frac{4am}{l} + \frac{8am^3}{l^3}$ ... (7)

இதில் (5)-ஐயும் (6)-ஐயும் பிரதியிட்டால்

$$-\frac{2m}{l^2} + \frac{4am}{l} + \frac{8am^3}{l^3} + \frac{2m}{l^2} = \frac{4am}{l} + \frac{8am^3}{l^3}$$

எனவே சமன்பாடு (7) சமனடைகிறது.

இதிலிருந்து $S(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வரைச் செங்கோடு (7)-ன் மேல் அமைகிறது என்று தெளிவாகிறது.

எனவே, P, Q-களில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும். S என்ற புள்ளி, $R\left(\frac{4am^2}{l^2}, \frac{4am}{l}\right)$ என்ற புள்ளியில் வரையப் படும் வரைச் செங்கோட்டில் அமைந்துள்ளது என்று நிறுவப்படு கிறது.

பயிற்சி 6.

1. பரவளைவின் குவியம், இயக்குவரை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அதன் சமன்பாடு காண்க.

(அ) குவியம் $(-1, 1)$, இயக்குவரை $4x+3y+2=0$

(ஆ) குவியம் $(0, 0)$, இயக்குவரை $x+y=4$

(இ) குவியம் $(3, -2)$, இயக்குவரை $3x+2y-4=0$

(B. E. '62)

2. (a) ஒரு பரவளைவின் அச்சு $3x-4y+5=0$, உச்சி $(1, 2)$ செவ்வகலம் 8 என்றால் அதன் சமன்பாடு காண்க.

(b) ஒரு பரவளைவின் அச்சு $x-2y+1=0$, உச்சி $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, செவ்வகலம் $4/\sqrt{5}$ என்றால் அதன் சமன்பாடு காண்க.

3. ஒரு பரவளைவின் உச்சி $(3, 2)$, இயக்குவரை $3x-2y-10=0$. அதன் சமன்பாடு யாது?

4. கீழ்க்கண்ட பரவளைவுகளுக்கு உச்சி, அச்சு, செவ்வகலம், குவியம், இயக்குவரை காண்க.

(i) $y^2-6y-x+9=0$

(ii) $y^2-2x-6y+5=0$

(iii) $x^2-4x-5y-1=0$

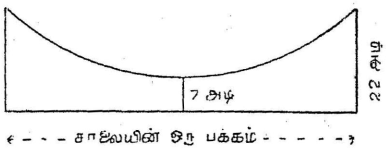
(iv) $2y^2-20x-8y+3=0$

(v) $5x^2+15x-10y-4=0$

(vi) $4y^2+12x-20y+67=0$ (B. E. '65)

5. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் (suspension bridge) கம்பி பரவளை வடிவத்தில் உள்ளது. சங்கிலியின் ஒரு பக்கத்தில்

இருந்து அதன் மிகக் கீழ்ப்புள்ளி (lowest point from one side of the road) 7 அடி உயரத்திலும், மிக உயரப்புள்ளி (h ghest point) 22 அடி உயரத்திலும் இருந்தால் அந்த பரவளைவின் செவ்வகலம் காண்க [படம் 57].



படம் 57.

6. ஒரு குகை வழி பரவளைவு உருவத்தில் அமைந்துள்ளது. சாலையின் அகலம் 34 அடி. ரோட்டின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் நிற்கும் 6 அடி உயரமுள்ள ஒரு மனிதனுடைய தலை பரவளையைச் சரியாகத் தொடுகிறது என்றால், அந்தக் குகை வழியின் மிகப் பெரிய உயரம் என்ன?

7. மேலே உள்ள (6)-ம் கணக்கில் சாலையின் அகலம் 20 அடி என்றும், மிகப் பெரிய உயரம் 12 அடி என்றும் வைத்துக் கொண்டால் சாலையின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 5 அடி தூரத்தில மிக அதிகமாக (utmost) எவ்வளவு உயரமான கம்பத்தை குத்தாக நிறுத்த முடியும்?

8. $x^2 + y^2 = 4a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவைக் குறித்து இசைக்கோடுகள் என்றால் அவைகளின் இசைப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை என்ன?

9. m-ன் மதிப்பு எதுவானாலும் $(m \pm 0)$, $y = m(x + a) + \dfrac{a}{m}$ என்பது $y^2 = 4a(x + a)$-யின் தொடுகோடு என்று நிறுவுக.

10. ஒரு பரவளைவின் இரண்டு தொடுகோடுகள் அதன் சமச்சீர் அச்சிலிருந்து θ_1, θ_2 கோணங்களில் உள்ளன. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = k$ (மாறிலி) என்றால் அந்தத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை உச்சி வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு.

(b) $\theta_1 + \theta_2 = 90°$ என்றால் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை குவியம் வழியாக செல்லும் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு நேர்கோடு.

11. $\tan^2\theta = \frac{\sqrt{c^2 + 4a^2} - c}{2c}$ என்றால், $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கும் $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவுக்கும் வரையப்பட்ட பொதுத் தொடுகோடு x-அச்சிலிருந்து θ கோணத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

12. $S \equiv y^2 - 4ax$ என்ற பரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் $60°$ கோணத்தில் வெட்டுகின்றன. வெட்டும் புள்ளியின் நியமப் பாதை மையவகற்சி (eccentricity) 2 ஆக உடைய ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '71)

13. $x + 4a = 0$ என்ற கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவுக்கு தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டால் தொடு நாண்கள் உச்சியில் செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்ளும் என்று காண்பிக்கவும்

14. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைக் குறித்து P என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவைத் தொடுகிறது. P-யின் நியமப்பாதை $y^2 + ax = 0$ என்று நிறுவுக.

15. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் P, Q என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் R-ல் சந்திக்கின்றன.

(i) P-யின் கிடைத்தூரம் : Q-வின் கிடைத்தூரம் (abscissa) $= \mu^2 : 1$ என்றால், R-ன் நியமப்பாதை,

$$y^2 = (\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{1}{2}})^2 \, ax$$ என நிறுவுக.

(ii) P-யின் கிடைத்தூரம் : Q-வின் கிடைத்தூரம் $= \mu : 1$ என்றால் R-ன் நியமப்பந்தை

$$y^2 = (\mu^{\frac{1}{4}} + \mu^{-\frac{1}{4}})^2 \, ax$$ என நிறுவுக.

16. $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P, Q-களையும் (C, O) என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடுகள் பரவளைவை மீண்டும் R, T என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. RT-யின் சமன்பாடு $nx - mcy + lc^2 = 0$ என நிறுவுக. (B. Tech. '64)

17. ஒரு பரவளைவின் உச்சித் தொடுகோட்டில் (tangent at the vertex) உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து அவைகளின் இசைக்கோடு களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிகளின் (feet of the perpendiculars) நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என்று காண்பிக்கவும். (B. Tech. '67)

18. ஒரு பரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் இயக்கு வரையை Q, R என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்து P என்ற புள்ளியில் வெட்டு கின்றன. $QR = d$ (மாறிலி) என்றால் P-யின் நியமப்பாதை $(y^2 - 4ax)(x + a)^2 = d^2x^2$ என்று நிறுவுக.

19. ஒரு பரவளைவின்மேல் உள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் T-யில் வெட்டுகின்றன. S குவியம் என்றால்

(a) $ST^2 = SP \cdot SQ$ என்றும்

(b) TP-யும், TQ-வும் S-ல் சமகோணங்களில் எதிர் கொள்கின்றன என்றும் நிறுவுக. (B. E. '59)

20. ஒரு குவிய நாணின் (focal chord) முனைப் புள்ளிகளில் ஒன்று $(at^2, 2at)$ என்றால் மற்ற முனைப் புள்ளி காண்க. அந்த நாணின் நீளம் எவ்வளவு? (B. E. '66)

21. PQ, RT என்பவை இரு குவிய நாண்கள். $PQRT$ என்ற நாற்கரத்தின் இருசோடி எதிர்ப் பக்கங்களும் பரவளைவு உள்ள திசையிலேயே வெட்டுகின்றன என்று காண்பிக்கவும். (B. Tech.'70)

22. S குவியம், PQ குவிய நாண் என்றால் $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a}$ ($4a$ = செவ்வகலம்) என்று காண்பிக்கவும்.

23. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் உள்ள மூன்று புள்ளி களின் நிலைத் தூரங்கள் y_1, y_2, y_3 என்றால் அந்த மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{8a}$ $(y_1 \sim y_2)(y_2 \sim y_3)(y_3 \sim y_1)$ என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '65)

[$\sim$ என்பது வித்தியாசத்தின் குறி]

24 $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் மேல் உள்ள Q, R என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் பரவளைவை மீண்டும் P-யில்

வெட்டுகின்றன. QR என்ற நாண் பரவளைவின் அச்சின் ஒரு நிலைப்புள்ளி (fixed point) வழியாகச் செல்கிறது என்று நிறுவுக.
(B. E. '70)

25. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் உள்ள $P(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு பரவளைவை Q-வில் வெட்டுகிறது. A என்பது உச்சி என்றால் $\Delta\, APQ$-வின் பரப்பு $\frac{2a^2}{t}$ $(1 + t^2)(2 + t^2)$ என்று நிறுவுக.

26. ஒரு பரவளைவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் கிடைத் தூரமும் நிலைத் தூரமும் (abscissa and ordinate) சமமாக இருக்கின்றன. அந்தப் புள்ளியில் வரைச் செங்கோட்டு நாண் (normal chord) குவியத்தில் ஒரு செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்கிறது என நிறுவுக.
(B. E. '72)

27. $y^2 = 4ax$ என்ற ஒரு பரவளைவின்மேல் உள்ள P, Q, R என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் (h, k) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. $\Delta\, PQR$-ன் ஈர்ப்பு மையம் பரவளைவின் அச்சில் உச்சியிலிருந்து $\frac{2}{3}\,(h - 2a)$ தூரத்தில் அமைந்துள்ளது என்று நிறுவுக.
(B. Tech. '66)

28. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் உள்ள (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளில் வரையச் செங்கோடுகள் (x_3, y_3) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

$$x_3 = 2a + \frac{1}{4a}(y_1{}^2 + y_1\, y_2 + y_2{}^2)$$

$$y_3 = -\frac{y_1\, y_2}{8a^2}(y_1 + y_2)$$

என்று காண்பிக்கவும்.

29. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் மேல் உள்ள $(4a, 4a)$, $(2a, 2a\sqrt{2})$ என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோட்டு நாண்கள் முறையே குவியத்திலும், உச்சியிலும் செங்கோணத்திலும் எதிர்கொள்கின்றன என்று நிறுவுக.
(B. E. '62)

30. PQ என்பது $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோட்டு நாண். P, Q என்ற

புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் T-யில் சந்திக்கின்றன. இயக்கு வரை TP-யை இருசம கூறுக்குகிறது என நிறுவுக.

(B. E. '54)

31. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையின்மேல் உள்ள A, B என்ற புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலும் அந்த புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் (x_2, y_2) என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றன.

$$x_2 = 2a - x_1 + \frac{y_1^2}{a}, \; y_2 = -\frac{x_1 y_1}{a}$$ என்று காண்பிக்கவும்.

32. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையின் PQ என்ற நாண் உச்சியில் செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்கிறது. P, Q-களில் வரைச் செங் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை $y^2 = 16a(x - 6a)$ என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '58)

33. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையின் வரைச் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $(x + 2a) y^2 + 4a^3 = 0$ என நிறுவுக. (B. E. '61, 63)

34. ஒரு பரவளையின் வரைச் செங்கோடுகள் பரவளையின் அச்சுக்கு θ_1, θ_2 கோணங்களில் உள்ளன. $\theta_1 + \theta_2 = 90°$ என்றால், அந்த வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை $y^2 = a(x - a)$ என நிறுவுக.

35. ஒரு பரவளையின் அச்சும் இயக்குவரையும் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நாண் பரவளையை A, B என்ற புள்ளி களில் வெட்டுகின்றன. A, B-களில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

36. $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையின் வரைச் செங்கோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை $al^3 + 2alm^2 + m^2n = 0$ என்று நிறுவுக.

37. ஒரு பரவளையின் உச்சியில் செங்கோணத்தில் எதிர் கொள்ளும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதையும் ஒரு பரவளைவுதான் என்று நிறுவுக. (B. Tech. '65)

38. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையின் மேல் உள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி, அதாவது

பரவளேவின் மேல் உள்ளது என்ருல், PQ-வின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை $y^2 = 2a(x + 2a)$ என்று காண்பிக்கவும்.

39. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளேவின் நாண் $y^2 + 4ax = 0$ என்ற பரவளேவைத் தொடுகிறது. அந்த நாணின் நடுப் புள்ளி யின் நியமப்பாதை யாது? (B. Tech. '72)

40. ஒரு பரவளேவின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு பரவளேவின் அச்சை Q என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. PQ-வின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை மற்ருெரு பரவளேவு எனக் காண்பிக்கவும்.

41. ஒரு பரவளேவின் குவிய நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை குவியத்தை உச்சியாகக் கொண்ட மற்ருெரு பரவளேவு என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '63)

42. ஒரு பரவளேவின் வரைச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $y^4 - 2a(x - 2a)y^2 + 8a^4 = 0$ என்று நிறுவுக.

43. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளேவின் நாண்கள் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைத் தொட்டால் அந்த நாண்களின் நடுப்புள்ளி களின் நியமப்பாதை என்ன? (B E. '62)

44. P என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு பரவளேவுக்கு வரையப் பட்ட வரைச் செங்கோடுகளில் இரண்டு ஒன்ருக இணைந்தால் (two of the normals coincide) P-யின் நியமப்பாதை $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '46)

45. P என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு பரவளேவுக்கு வரையப் பட்ட வரைச் செங்கோடுகள் பரவளேவின் அச்சை R, S, T என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. A என்பது உச்சி. AR, AS, AT என்ற தூரங்கள் கூட்டு விருத்தி கூட்டுத்தொடர் (arithmetic progression) ஆக இருந்தால் P-யின் நியமப்பாதை $27ay^2 = 2(x - 2a)^3$ என நிறுவுக.

46. இயக்கு வரையில் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளேவுக்கு வரையப்பட்ட தொடு நாண்களின் நடுப்புள்ளி களின் நியமப்பாதை $y^2(2x + a) = a(3x + a)^2$ என நிறுவுக.

47. ஒரு வட்டம் ஒரு பரவளேவைப் பொதுவாக 4 புள்ளி களில் வெட்டும் என்றும் அதாவது புள்ளிகளின் நிலைத் தூரங்களின் (ordinates) கூட்டுப் பலன் பூச்சியம் என்றும் நிறுவுக:

48. ஒரு வட்டம் ஒரு பரவளைவை P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் PQ-வும், RS-ம் அதாவது பரவளைவின் அச்சுக்குச் சம கோணத்தில் உள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

49. P என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு பரவளைவுக்கு வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடுகள் PB, PC, PD என்றால் B, C, D வழியாக வரையப்பட்ட வட்டம் பரவளைவின் உச்சி A வழியாகச் செல்லும் என நிறுக.

விடைகள்

1. (அ) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 34x - 62y + 46 = 0$

(ஆ) $x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y - 16 = 0$

(இ) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 54x + 68y + 153 = 0$

2. (a) $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 130x - 160y + 425 = 0$

(b) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 6x - 8y + 1 = 0$

3. $4x^2 + 9y^2 + 12xy + 12x - 112y + 44 = 0$

4. (i) $(0, 3)$, $y - 3 = 0$, $1, \left(\frac{1}{4}, 3\right)$, $x + \frac{1}{4} = 0$

(ii) $(-2, 3)$, $y - 3 = 0$,

$2, \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, $2x + 5 = 0$

(iii) $(2, -1)$, $x - 2 = 0$,

$5, \left(2, \frac{1}{4}\right)$, $y + \frac{9}{4} = 0$

(iv) $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$, $4x + 11 = 0$,

$10, \left(\frac{9}{4}, 2\right)$, $x = \frac{-11}{4}$

(v) $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-61}{40}\right)$, $2x + 3 = 0$,

$2, \left(\frac{-3}{2}, \frac{-41}{40}\right)$, $40y + 81 = 0$

(vi) $\left(\frac{-7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $2y = 5$,

$3, \left(\frac{-17}{4}, \frac{5}{2}\right)$, $x = \frac{-11}{4}$

5. 60 அடி 6. $27\frac{3}{32}$ அடி.

7. 9 அடி 8. $x^2 - y^2 = 4a^2$

20. $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{-2a}{t}\right)$, $a\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$ 35. $y^2 = a(x - a)$

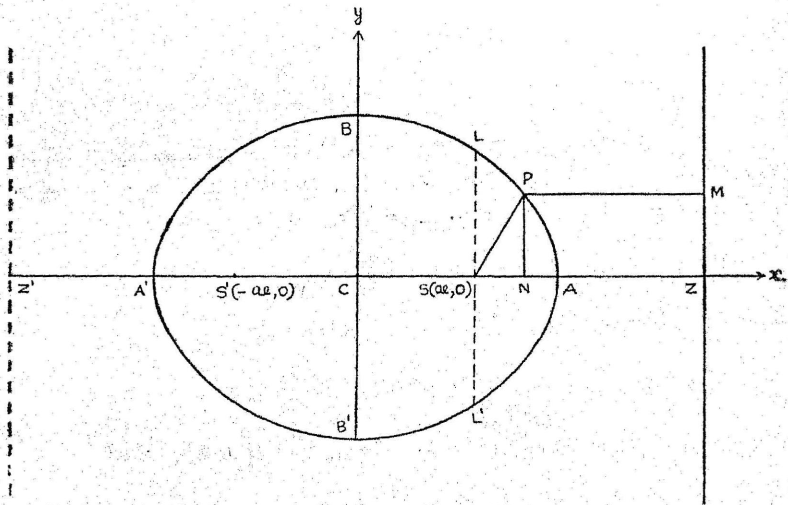
39. $3y^2 = 4ax$ 43. $(y^2 + 4a^2)\, a^2 = (y^2 - 2ax)^2$

துணை அதிகாரம் 7.

நீள் வட்டம்

(Ellipse)

§ 74. நியம வடிவத்தில் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு (Equation of the Fllipse in the standard form)



படம் 58.

நீள் வட்டத்தின் மையவகற்சி $e > 1$ என்பதை நாம் ஏற்கனவே கூறியிருக்கிறோம்.

S என்ற புள்ளி குவியம், l என்ற கோடு இயக்கு வரை என்போம். இயக்கு வரைக்கு ⊥ ஆக SZ வரைக. SZ-ஐ A, A' என்ற புள்ளிகளால் $e:1$ என்ற விகிதத்தில் முறையே உள்ளிலும் புறத்திலும் (internally and externally) பிரிக்கவும்.

$$\text{அதாவது } \frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

எனவே வரைவிலக்கணப்படி A, A' என்ற புள்ளிகள் நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ளன.

$AA' = 2a$ என்க. C அதன் நடுப்புள்ளி என்றால் $CA = CA' = a$

C-யை ஆதியாகவும் CZ-ஐ x-அச்சாகவும் CZ-க்கு ⊥ ஆக உள்ள நேர்கோட்டை y-அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்க.

$$SA = e\,.\,AZ \text{ அதாவது } CA - CS = e(CZ - CA) \quad \dots \quad (1)$$

$$SA' = e\,.\,A'Z \text{ அதாவது } CA' - CS = e(CZ - CA') \quad \dots \quad (2)$$

(2)-லிருந்து (1)-ஐக் கழித்தால்

$$2CS = e\,.\,2a \qquad \therefore \quad CS = ae$$

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்டினால்

$$2a = e\,.\,2CZ \qquad \therefore \quad CZ = \frac{a}{e}$$

$P(x, y)$ என்பது நீள்வட்டத்தின்மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்போம். S-ன் ஆ. தொ. $(ae, 0)$ இயங்கு வரைக்கு ⊥ ஆக PM வரைக. x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PN வரைக. பின்பு,

$$CN = x, \ NP = y, \ PM = NZ = \frac{a}{e} - x$$

வரைவிலக்கணப்படி $SP^2 = e^2\,.\,PM^2$

$$\text{அதாவது } (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

$$x^2 - 2ae\,x + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2ae\,x + e^2x^2$$

$$\therefore \quad x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\text{அதாவது } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$b^2 = a^2(1 - e^2)$ என்போம்.

$e < 1$ என்பதால் b^2, + மதிப்பு பெறும். எனவே b மெய்க் கணியம் நியம வடிவத்தில் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

குறிப்பு : 1. சமன்பாடு (A)-யில் (x, y)-க்குப் பதிலாக $(x, -y)$, அல்லது $(-x, y)$ அல்லது $(-x, -y)$ இட்டாலும் சமன்பாடு சமனடையும். எனவே நீள்வட்டம் x-அச்சு, y-அச்சு, ஆதி ஆகியவற்றுக்குச் சமச்சீராக உள்ளது என்று புலனாகிறது.

2. சமன்பாடு (A)-யை x-அச்சுடன் (அதாவது $y = 0$) தீர்வு காணில், $x = \pm a$.

மேலும் y-அச்சுடன் (அதாவது $x = 0$) தீர்வு காணில் $y = \pm b$. எனவே $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ ஆகிய புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் மேல் உள்ளன.

3. நீள்வட்டம் ஒரு மூடிய வளைகோடு (closed curve). அது $x = \pm a$, $y = \pm b$ ஆகிய செவ்வகத்திற்குள் அடங்கும்.

4. $AA' = 2a$. இதை நெட்டச்சு அல்லது பேரச்சு (major axis) என்பர்.

$BB' = 2b$. இதைக் குற்றச்சு அல்லது சிற்றச்சு (minor axis) என்பர்.

C-யை நீள்வட்டத்தின் மையம் என்றும், C வழியாகச் செல்லும் நாண்களை விட்டங்கள் என்றும் கூறப்படும். ACA', BCB' என்பவை தலையாய விட்டங்கள் (principal diameters).

5. குவியம் $S(ae, 0)$ என்றால் அதற்கு ஒத்த (corresponding) இயக்குவரை $x = \frac{a}{e}$ நீள்வட்டம் சமச்சீருள்ளது என்பதால் அதற்கு $S'(-ae, 0)$ என்ற மற்றொரு குவியமும் அதற்கு ஒத்த $x = -\frac{a}{e}$ என்ற இயக்குவரையும் உண்டு.

6. குவியத்திலிருந்து நீள்வட்டத்திற்கு உள்ள நிலைத்தூரம் (ordinate at the focus S or S') அரைச் செவ்வகலம் (semi-latus sectum) எனப்படும்.

SL = அரைச் செவ்வகலம் என்றால், (ae, SL) என்பது நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள L என்ற புள்ளியின் ஆ. தொ. ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1 \text{ அதாவது } SL^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$\text{அதாவது } SL^2 = b^2 \cdot \frac{b^2}{a} \quad [\because \quad b^2 = a^2(1 - e^2)]$$

$$\therefore \quad SL = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{செவ்வகலம்} = 2SL = \frac{2b^2}{a}$$

7. மையவகற்சி $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

§ 75. குறியீடுகள் (Notations)

இந்த துணை அதிகாரத்தில் கீழ்வரும் குறியீடுகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad \text{என்றால்,}$$

$$S_1 \equiv \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

$$S_2 \equiv \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1$$

$$S_{12} \equiv \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1$$

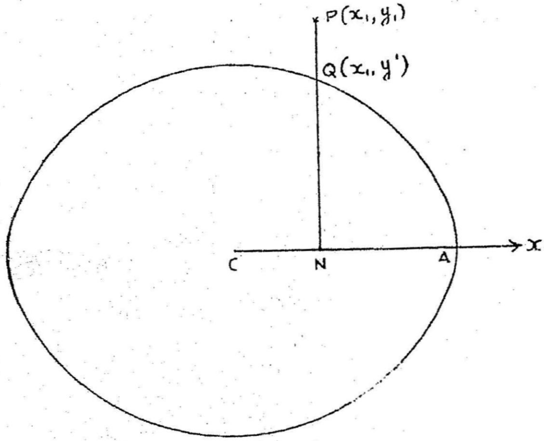
$$S_{11} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

$$S_{22} \equiv \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1$$

மேலும் $L \equiv lx + my + n$ என்றால்,

$$L_1 \equiv lx_1 + my_1 + n$$

§76. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் அமைப்பு



படம் 59.

P-யிலிருந்து x-அச்சுக்கு ⊥ ஆக PN வரைக. PN என்பது நீள் வட்டத்தை Q-வில் வெட்டட்டும். Q-வின் ஆ. தொ. (x_1, y') என்போம்.

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad (y')^2 = b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

P என்பது நீள் வட்டத்தின் வெளியே, மேல், அல்லது உள்ளே இருந்தால்

முறையே $PN^2 \gtreqless QN^2$

அதாவது $y_1^2 \gtreqless (y')^2$

அதாவது $y_1^2 \gtreqless b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$

அதாவது $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \gtreqless 1$

அதாவது $S_{11} \gtreqless 0$

§ 77. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$\therefore \quad P(x_1, y_1)$-ல் $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} =$ தொடுகோட்டின் சரிவு

$\therefore \quad P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் தொடுகோடு

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

$$\therefore \quad a^2(yy_1 - y_1^2) = -b^2 xx_1 + b^2 x_1^2$$

அதாவது $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yv_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

ஆனால் $P(x_1, y_1)$ என்பது நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ளது.

எனவே, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

அதாவது $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$

அதாவது $S_1 = 0$

§ 78. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மேல் $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$P(x_1, y_1)$-ல் தொடுகோட்டின் சரிவு $= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$\therefore$ வரைச் செங்கோட்டுச் சரிவு $= \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$

∴ வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = 0 \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

$$b^2 x_1 y - b^2 x_1 y_1 = a^2 x y_1 - a^2 x_1 y_1$$

அதாவது $\dfrac{a^2 x}{x_1} - \dfrac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2$

§ 79. $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்கோடு $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை

$$lx + my + n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற கோடு $S = 0$-வை $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடட்டும்.

ஆனல் (x_1, y_1)-ல் அமையும் தொடுகோடு

$$S_1 \equiv \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே (1)-ம் (2)-ம் ஒரே கோட்டைக் குறிக்கிறது. அதனல் ஒரே மாதிரி உறுப்புகளின் குணகங்கள் விகித சமத்தில் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1/a^2}{l} = \frac{y_1/b^2}{m} = \frac{-1}{n}$$

அதாவது $x_1 = \dfrac{-a^2 l}{n}\ y_1 = \dfrac{-b^2 m}{n}$

இந்தப் புள்ளி (1)-ன்மேல் உள்ளது.

$$\therefore \quad -\frac{a^2 l^2}{n} - \frac{b^2 m^2}{n} + n = 0$$

எனவே நாம் விரும்பிய நிபந்தனை $a^2 l^2 + b^2 m^2 = n^2$ மேலும் தொடுபுள்ளி $\left(\dfrac{-a^2 l}{n}, \dfrac{-b^2 m}{n}\right)$

துணை முடிவு :

(1) $y = mx + c$ என்ற கோடு $S = 0$-வின் தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை $c^2 = a^2 m^2 + b^2$. தொடுபுள்ளி, $\left(-\dfrac{a^2 m}{c}, \dfrac{b^2}{c}\right)$

(2) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ என்ற இருகோடுகள் m-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $S = 0$-வின் இணைத் தொடுகோடுகள் (parallel tangents) ஆகும்.

§ 80. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தின் செங்குத்துத் தொடுகோடுகள் (perpendicular tangents) வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் ஆகும். (B. Tech. '63)

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

என்ற தொடுகோடு (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால்,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

அதாவது $m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - b^2) = 0 \quad (1)$

சமன்பாடு (1) என்பது m-ல் இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலால் இரண்டு தொடுகோடுகள். (x_1, y_1)-ல் வெட்டுகின்றன. அந்தத் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் (1)-ன் மூலங்களான m_1, m_2 ஆகும்.

ஆனால் அந்தத் தொடுகோடுகள் செங்குத்தாக உள்ளன.

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$$

$$\therefore \quad \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$$

அதாவது $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$

$\therefore$ செங்குத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $(x_1\, y_1)$-ன் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ இந்த வட்டத்தை குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் (Director circle) என்பர்.

குறிப்பு : பரவளைவின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் இயக்குவரை ஆகும். (§ 73·6)

§ 81. ஏதேனும் ஒரு தொடுகோட்டுக்கு குவியம் S-லிருந்து SY, $S'Y'$ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் அந்த தொடுகோட்டை Y, Y'-களில் வெட்டட்டும். Y, Y'-களின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் ஆகும். மேலும் $SY \cdot S'Y' = b^2$

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது நீள்வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு (1)-க்குச் செங்குத்தாக $S(ae, 0)$ வழியாகச் செல்லும் கோடு

$$y - 0 = \frac{-1}{m}(x - ae) \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

(1)-ம் (2)-ம் Y-ல் வெட்டுகின்றன. Y-ன் நியமப்பாதை காண m-ஐ (1), (2)-களிலிருந்து விலக்கவேண்டும்.

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1')$$

$$(my + x)^2 = a^2e^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2')$$

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்டினால்

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2$$
$$= a^2m^2 + a^2 - a^2e^2 + a^2e^2$$

அதாவது $(1+m^2)(x^2 + y^2) = a^2(1 + m^2)$

$$1 + m^2 \neq 0 \qquad \therefore \quad x^2 + y^2 = a^2$$

இந்த வட்டம் அரை நெட்டச்சை (semi major axis) ஆரமாகவும் நீள்வட்டத்தின் மையத்தை மையமாகவும் உடையது. இதற்குத் **துணை வட்டம்** (auxiliary circle) என்று பெயர் (படம் 60).

Y'-ன் நியமப்பாதையும் இதுவே என்று எளிதாக உணரலாம்.

மேலும் $S(ae, 0)$-விலிருந்து (1)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $= SY = \dfrac{mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$

இதேபோல் $S'(-ae, 0)$ விலிருந்து (1)-க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $= S'Y' = \dfrac{-mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$

$$\therefore \quad SY \cdot S'Y' = \frac{a^2m^2 + b^2 - m^2a^2e^2}{1 + m^2}$$
$$= \frac{b^2 + a^2m^2(1 - e^2)}{1 + m^2}$$
$$= \frac{b^2 + b^2m^2}{1 + m^2} = b^2$$

$$\therefore \quad SY \cdot S'Y' = b^2$$

§ 82. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் தொடுநாண் $S_1 = 0$

§ 35 ஐப் பார்க்கவும்.

§ 83. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $S_1 = 0$ ஆகும்.

§ 37 ஐப் பார்க்கவும்.

§ 84. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தில், $M(x_1, y_1)$ என்பதை நடுப்புள்ளியாக உள்ள நாணின் சமன்பாடு

AB என்பது $M(x_1 . y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாக உடைய நாண் என்போம். அதன் சரிவு $\tan\theta$ என்ருல் அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(படம் 53 ஐப் பார்க்கவும்)

இங்கே r என்பது $M(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வெக்டர் தூரத்தைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, மேற்படி நாணின்மேல் உள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta, \ r_1 + r\sin\theta)$ என்று குறிக்கலாம்.

இந்தப் புள்ளி A அல்லது B-யைக் குறித்தால் அதன் ஆ. தொ. $S = 0$-வைச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

அதாவது $\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$

அதாவது $r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) + 2r(b^2x_1\cos\theta + a^2y_1\sin\theta)$
$+ (b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2) = 0 \quad \ldots \quad (2)$

சமன்பாடு (2)-ல் r-ன் மூலங்கள் வெக்டர் $\vec{MA}, \vec{MB}$-களைக் குறிக்கும்.

ஆனால் $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$

எனவே (2)-ன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 0$

அதாவது r-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $b^2x_1 \cos\theta + a^2y_1 \sin\theta = 0$

$\therefore \quad \tan\theta = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ = நாணின் சரிவு

இதை (1)-ல் பயன்படுத்தினால் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$$

அதாவது $a^2(yy_1 - y^2) = -b^2(xx_1 - x_1^2)$

அதாவது $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}$

இருபுறத்திலும் -1-ஐக் கூட்டினால்

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

அதாவது $\quad S_1 = S_{11}$

§ 85. $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **என்ற நீள் வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் இரு தொடு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு**

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$P(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லும் ஏதேனும் ஒரு நேர்கோடு PLM-ன் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

[படம் 54-ஐப் பார்க்கவும்]

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad (2)$$

இதில் $\tan\theta$ என்பது அந்தக் கோட்டின் சரிவையும், r என்பது $P(x_1, y_1)$-லிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வெக்டர் தூரத்தையும் குறிக்கும்.

(2)-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $(x_1 + r\cos\theta,$ $y_1 + r\sin\theta)$ எனக் குறிக்கலாம்.

இந்தப் புள்ளி $S = 0$-வின் மேல் இருந்தால் (அதாவது இந்தப் புள்ளி L அல்லது M ஆனால்) அதன் ஆ. தொ. $S = 0$-வைச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

அதாவது $r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + 2r(a^2x_1\cos\theta + b^2y_1\sin\theta)$
$$+ (b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

(3)-ன் மூலங்கள் வெக்டர் $\vec{PL}, \vec{PM}$-களைக் குறிக்கும். ஆனால் சமன்பாடு (2) ஒரு தொடுகோடு ஆகும்போது $\vec{PL}, \vec{PM}$ ஆகியவை சமமாகி தொடுகோடு PA அல்லது PB-யுடன் ஒன்றிவிடும்.

இதற்கான நிபந்தனை : தன்மை காட்டி $= 0$

$$\therefore \quad (b^2x_1\cos\theta + a^2y_1\sin\theta)^2 = (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) \times (b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2)$$

அதாவது $$\left(\frac{x_1}{a^2}\cos\theta + \frac{y_1}{b^2}\sin\theta\right)^2 = \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) . S_{11} \quad \ldots \quad (4)$$

(4)-லிருந்து $\tan\theta$-வைப் பெற்று (2)-ல் பிரதியிட்டு, வேண்டிய சமன்பாடு காணலாம். அல்லது (2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து θ-வை நீக்கிவிட்டும் நாம் விரும்பும் சமன்பாடு காண முடியும். பிந்திய முறை எளிதாகையால் அதைக் கையாள்வோம்.

(2)-லிருந்து $\cos\theta$, $\sin\theta$ ஆகியவற்றைப் பெற்று (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\left[\frac{x_1}{a^2}\left(\frac{x-x_1}{r}\right) + \frac{y_1}{b^2}\left(\frac{y-y_1}{r}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1-x_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{y-y_1}{r}\right)^2\right] . S_{11}$$

அதாவது $\left[\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right]^2$

$$= \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right] \cdot S_{11}$$

அதாவது $(S_1 - S_{11})^2 = (S - 2S_1 + S_{11}) \cdot S_{11}$

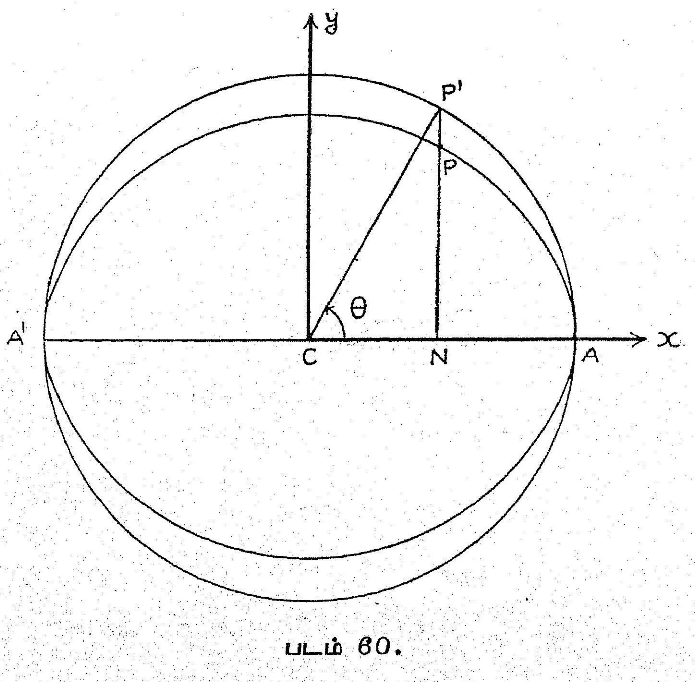
எனவே தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$S_1^2 = SS_{11}$$

அதாவது $\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2$

$$= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)$$

§86. மையவகற்சிக் கோணம் (Eccentric angle)



படம் 60.

C மையமாகவும், $CA = a =$ அரை நெட்டச்சுவை ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்திற்குத் துணை வட்டம் (auxiliary circle) என்று பெயர்.

நீள் வட்டத்தின்மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்போம். x-அச்சுக்கு x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக PN வரைக. NP-யை நீட்டியது துணை வட்டத்தை P'-ல் வெட்டட்டும்.

P, P' ஆகிய சோடிப் புள்ளிகளை ஒத்த புள்ளிகள் (corresponding points) என்று கூறுவர்.

$\widehat{ACP'} = \theta$-வை மையவகற்சிக் கோணம் என்கிறோம்.

P-யின் ஆ. தொ. (x, y) என்றால் (படம் 60).

$$x = CN = CP' \cos\theta = a\cos\theta$$

இதை நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad y^2 = b^2(1 - \cos^2\theta) = b^2\sin^2\theta$$

$\therefore \quad y = b\sin\theta$ (படத்தில் NP நேர்க்குறியுடையது) எனவே P-யின் ஆ. தொ. $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

θ-வின் எந்த மதிப்புக்கும் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்பது நீள் வட்டத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad xa = \cos\theta, \qquad y = b\sin\theta$$

என்பது நீள் வட்டத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடு.

குறிப்பு : (1) $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்பதைச் சில வேளைகளில் 'θ' எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடுவோம்.

(2) $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்றால் θ என்பது $\widehat{ACP}$ அல்ல என்றும் ஆனால் அது $\widehat{ACP'}$ என்றும் கவனிக்கவும். ஆனால், $\theta = 0, \frac{\pi}{2}\ \pi, \frac{3\pi}{2}$ என்றால், $\widehat{ACP} = \widehat{ACP'}$ ஆகும்.

§ 87. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மேல் உள்ள 'θ' மற்றும் 'φ' என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண்.

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$$\frac{y - b\sin\theta}{x - a\cos\theta} = \frac{b\sin\theta - b\sin\varphi}{a\cos\theta - a\cos\varphi}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}$$

$$= -\frac{b}{a} \frac{\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad ay\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) - ab\sin\theta\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

$$= -bx\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + ab\cos\theta\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

அதாவது $bx\cos\frac{\theta+\varphi}{2} + ay\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$

$$= ab\left[\cos\theta\ \cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) - \sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= ab\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

எனவே நாம் விரும்பிய நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

§ 88. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின்மேல் உள்ள 'θ' என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு

§ 87-ல் $\varphi = \theta$ என்று பிரதியிட்டால் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும். ஆகவே தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

மாற்று வழி :

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$$

என்பது நீள்வட்டத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = \frac{-b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சரிவு $= \dfrac{-b\cos\theta}{a\sin\theta}$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - b\sin\theta = \frac{-b\cos\theta}{a\sin\theta}(x - a\cos\theta)$$

$$ay\sin\theta - ab\sin^2\theta = -bx\cos\theta + ab\cos^2\theta$$

அல்லது $bx + ay\sin\theta = ab$

$$\therefore\ \frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

§ 89. 'θ', 'φ' என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta),\ Q(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$$

என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $R(x_1, y_1)$ என்போம். இதனுல் PQ என்பது R-ன் தொடுநாண் ஆகும். எனவே PQ-வின் சமன்பாடு $S_1 = 0$ ஆகும்.

அதாவது $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$ ... (1)

ஆனுல் § 88-ல் பார்த்த முறைப்படி PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \quad \text{... (2)}$$

(1)-ம் (2)-ம் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{x_1/a^2}{\frac{1}{a}\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} = \frac{y_1/b^2}{\frac{1}{b}\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}$$

எனவே தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆ. தொ.

$$x_1 = \frac{a\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}\ ;\ y_1 = \frac{b\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}$$

§ 90. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள 'θ' என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு**

தொடுகோட்டின் சரிவு $= \frac{-b\cos\theta}{a\sin\theta}$

$\therefore$ வரைச் செங்கோட்டின் சரிவு $= \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}$

$\therefore$ $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$y - b\sin\theta = \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}\ (x - a\cos\theta)$$

அல்லது $by\cos\theta - b^2\sin\theta\cos\theta = ax\sin\theta - a^2\sin\theta\cos\theta$

அதாவது வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

§ 91. $lx + my + n = 0$ **என்ற கோடு** $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **என்ற நீள் வட்டத்திற்கு வரைச் செங்கோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை**

'θ' என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$lx + my + n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்போம். அதே புள்ளியில் § 90–ல் விளக்கியபடி வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ம் (2)-ம் ஒரே கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{l}{a/\cos\theta} = \frac{m}{b/\sin\theta} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$$

அதாவது $\frac{\cos\theta}{al} = \frac{\sin\theta}{m/b} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{-an}{l(a^2 - b^2)}\,;\ \sin\theta = \frac{-bn}{m(a^2 - b^2)}$$

θ-வை விலக்கினுல் நாம் விரும்பிய நிபந்தனை கிடைக்கும்.

அதாவது $\frac{a^2n^2}{l^2(a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2n^2}{m^2(a^2 - b^2)^2} = 1$

அதாவது $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n}$

§92. $P(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு பொதுவாக நான்கு வரைச் செங்கோடுகளை வரையலாம். அந்த வரைச் செங்கோடுகள் நீள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களின் கூட்டுப்பலன் $(2n + 1)\pi$ ஆகும் (n ஏதேனும் ஒரு முழு எண்)

நீள்வட்டத்தின்மேல் உள்ள 'θ' என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{b\beta} = a^2 - b^2$$

இது $P(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்ருல்

$$\frac{a\alpha}{\cos\theta} - \frac{b\beta}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

இதில் $t = \tan\frac{\theta}{2}\ \cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$

என்று பிரதியிட்டால்

$$\frac{a\alpha(1 + t^2)}{1 - t^2} - \frac{b\beta(1 + t^2)}{2t} = a^2 - b^2$$

அதாவது $b\beta\, t^4 + 2(a\alpha + a^2 - b^2)\, t^3$
$+ 2(a\alpha - a^2 + b^2)\, t - b\beta = 0 \quad \ldots \quad (1)$

இது நான்கு படிச் சமன்பாடு என்பதால் பொதுவாக நான்கு மூலங்கள் கிடைக்கும். எனவே, $P(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு நான்கு வரைச் செங்கோடுகள் வரைய இயலும்.

(1)-ன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3 t_4 என்போம்.

இங்கே $t_1 = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$, $t_2 = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$, முதலியன.

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$= \frac{\Sigma t_1 - \Sigma t_1 t_2 t_3}{1 - \Sigma t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3 t_4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆனல், சமன்பாட்டுக் கொள்கையின்படி (by the theory of equations)

$$\Sigma t_1 t_2 = 0, \quad t_1 t_2 t_3 t_4 = -b\beta/b\beta = -1$$

$$\therefore \quad 1 - \Sigma t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3 t_4 = 1 - 0 - 1 = 0$$

மேலும் $\Sigma t_1 \neq \Sigma t_1 t_2 t_3$

இவைகளை (2)-ல் பயன்படுத்துக.

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}\right) = \infty = \tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n+1)\pi$$

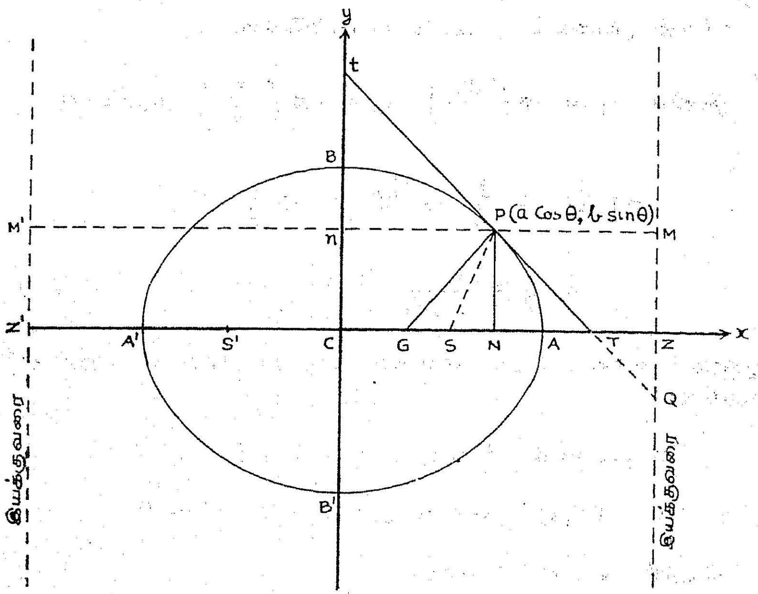
§ 93. நீள் வட்டத்தின் சிறப்புப் பண்புகள் (Special properties of an ellipse)

நீள்வட்டம் $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்றால் $P(x, y)$ அல்லது $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்பது அதன்மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (படம் 61).

$PN \perp CA, \quad Pn \perp CB$

$CN = x = a\cos; \quad NP = Cn = y = b\sin\theta$

P-யில் தொடும் தொடுகோடு x-அச்சை (அதாவது நெட்டச்சை T-யிலும், இயக்குவரையை Q-விலும், y-அச்சை (அதாவது குற்றச்சை) t-யிலும் வெட்டுகிறது.



படம் 61.

P-யில் வரைச் செங்கோடு x-அச்சை (அதாவ்து நெட்டச்சை G-யில் வெட்டுகிறது.

$S\,(ae,\,o)$, $S'\,(-\,ae,\,o)$ என்பவை குவியங்கள்.

ZM, $Z'M'$ இயக்குவரைகள்.

PM, PM' என்பவை ZM, $Z'M'$ என்ற இயக்குவரைகளுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்.

$$CA = CA' = a;\ CB = CB' = b$$

§ 93·1· $SP = a - ex = a(1 - b\cos\theta)$

$$S'P = a + ex = a(1 + e\cos\theta)$$

$$SP + S'P = 2a$$

நீள்வட்டத்தின் வரைவிலக்கணப்படி

$$SP = e\,.\,PM = e\,.\,NZ = e(CZ - CN)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} - x\right)$$

$$= a - ex$$

$$= a - ea\cos\theta$$

$$= a(1 - e\cos\theta)$$

இதேபோல் $S'P = e\,.\,PM' = e(CN + CZ')$

$$= e\left(x + \frac{a}{e}\right) = a + ex = a(1 + e\cos\theta)$$

மேலும் $SP + PS' = a(1 - e\cos\theta) + a(1 + e\cos\theta) = 2a$

§ **93·2.** $\dfrac{PN^2}{NA \cdot NA'} = \dfrac{b^2}{a^2}$ (மாறிலி)

$$NA = CA - CN = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta)$$

$$NA' = CA' + CN = a + a\cos\theta = a(1 + \cos\theta)$$

$$PN^2 = b^2\sin^2\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{NA \cdot NA'} = \frac{b^2\sin^2\theta}{a(1 - \cos\theta)\,.\,a(1 + \cos\theta)} = \frac{b^2}{a^2}$$

§ **93·3.** $SB = S'B = S'B = S'B' = a$

செங்கோண முக்கோணம் $\triangle CSB$-யில்

$$SB^2 = CS^2 + CB^2 = a^2e^2 + b^2$$

$$= a^2e^2 + a^2 - a^2e^2$$

$$= a^2$$

$$\therefore \quad SB = a$$

மேலும் $SBS'B'$ ஒரு சாய்சதுரம். எனவே

$$SB = S'B = SB' = S'B' = a$$

§ **93·4.** (i) $CN\,.\,CT = a^2$

(ii) $cn\,.\,ct = b$

(i) தொடுகோடு PT-யின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

இதை $y = 0$ (நெட்டச்சு என்பதுடன் தீர்வு காணில்

$$\frac{x}{a}\cos\theta + 0 = 1$$

அதாவது $T\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad CN \cdot CT = a\cos\theta \cdot \frac{a}{\cos\theta} = a^2$$

(ii) $t\left(0, \frac{b}{\sin\theta}\right)$ என்பது தெளிவாகிறது.

$$\therefore \quad cn \cdot ct = b\sin\theta \cdot \frac{b}{\sin\theta} = b^2$$

§ **93·5.** (a) $CG = e^2 \cdot CN = e^2 x = ae^2\cos\theta$

(b) $SG = e \cdot SP = ae\,(1 - e\cos\theta)$

(c) $SG = e \cdot S'P = ae\,(1 - e\cos\theta)$

(a) வரைச் செங்கோடு PG-யின் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

இதை $y = 0$-வுடன் தீர்வு காணில்

$$\frac{ax}{\cos\theta} - 0 = a^2 - b^2$$

$$\therefore \quad x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos\theta = \frac{a^2e^2}{a}\cos\theta = ae^2\cos\theta$$

அதாவது $CG = ae^2\cos\theta = e^2 x = e^2 \cdot CN$

(b) $S'G = \sqrt{(ae - e^2x)^2 + (0 - 0)^2} = e\,(a - ex)$

$= ae - ae^2\cos\theta$

$= ae\,(1 - e\cos\theta = e \cdot SP)$

(c) $S'G = \sqrt{(-ae - e^2x)^2 + (0-0)^2}$

$= e\,(u + ex)$

$= ae\,(1 + e\cos\theta) = e\,.\,S'P$

குறிப்பு : செவ்வகலத்தின் முனைப்புள்ளி L-ல் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சை φ-வில் சந்தித்தால், (a), (b), (c) ஆகியவற்றில் $x = ae$ எனப் பிரதியிடவேண்டும்.

$\therefore \quad C\varphi = e^2\,.\,(L$-ன் x-ஆ. தொலை)

$= e^2\,.\,ae = ae$

$S\varphi = e\,(a - e\,.\,ae) = ae\,(1 - e^2)$

$S\varphi = ae\,(1 + e^2)$

$SL = a\,(1 - e^2)\,;\; S'L = a\,(1 + e^2)$

§ 93·6. $S\hat{P}S'$ என்ற கோணத்தின் உள், வெளியிரு சமவெட்டிகள் முறையே வரைச் செங்கோடு PG, தொடுகோடு PT ஆகும்.

§ 93·5-ல் விளக்கியபடி

$SG = e\,.\,SP,\; S'G = e\,.\,S'P$

$\therefore \quad \dfrac{S'G}{GS} = \dfrac{S'P}{SP}$

எனவே PG என்ற வரைச் செங்கோடு $S'\hat{P}S$ என்ற கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டியாகும்.

மேலும் தொடுகோடு $PT \perp PG$ ஆகவே தொடுகோடு PT என்பது $S'\hat{P}S$ என்ற கோணத்தின் வெளியிரு சமவெட்டியாகும்.

§ 93·7. P யில் தொடும் தொடுகோடு இயக்குவரையை Q-வில் வெட்டினால் PQ என்ற தொடுகோட்டின் பகுதி, குவியம் S-ல் ஒரு செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்கிறது.

தொடுகோடு : $\dfrac{x}{a}\cos\theta + \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$

இயக்குவரை : $x = \dfrac{a}{e}$

இவைகளின் தீர்வு கண்டால் Q கிடைக்கும்.

எனவே $Q\left[\dfrac{a}{e}, \dfrac{b(e - \cos\theta)}{e\sin\theta}\right]$

SP-வின் சரிவு $= \dfrac{b\sin\theta - 0}{a\cos\theta - ae} = \dfrac{b\sin\theta}{a(\cos\theta - e)}$

SQ-வின் சரிவு $= \dfrac{\dfrac{b(e - \cos\theta)}{e\sin\theta} - 0}{\dfrac{a}{e} - ae} = \dfrac{b(e - \cos\theta)}{a(1 - e^2)\sin\theta}$

∴ மேற்கண்ட சரிவுகளின் பெருக்கல் பலன்

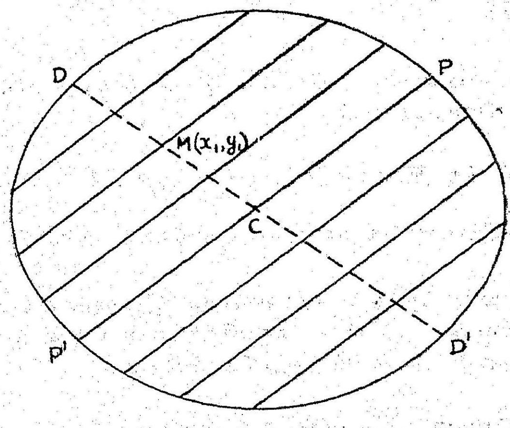
$= \dfrac{b\sin\theta}{a(\cos\theta - e)} \times \dfrac{b(e - \cos\theta)}{a(1 - e^2)\sin\theta} = \dfrac{-b^2}{a^2(1 - e^2)}$

$= \dfrac{-b^2}{b^2} = -1 \qquad [\because\ b^2 = a^2(1 - e^2)$

எனவே $P\hat{S}Q = 90°$

§ 93·8. துணைவிட்டங்கள் (Conjugate diameters)

ஒரு நீள்வட்டத்தின் இணை நாண்தொகுதி (system of paralle chords)யின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமபாதை ஒரு விட்டமாகும்.



படம் 62.

நீள் வட்டம் $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்போம்.

$y = mx$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நாண்தொகுதியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$M(x_1, y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாக உடைய ஒரு நாண் $S_1 = S_{11}$

அதாவது $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

இது $y = mx$-க்கு இணை என்ருல்

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

அதாவது $y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2 m} \cdot x_1$

எனவே $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} \cdot x$$

அல்லது $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$ என்ருல், $y = m'x$ இது ஒரு விட்டமாகும்.

இதைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

" $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ என்ருல், $y = mx$-க்கு இணையான நாண்களை $y = m'x$ என்ற விட்டம் இரு சம கூருக்கும் ".

$mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ என்ற சமச்சீர் தொடர்பிலிருந்து (symmetric relation), $y = m'x$-க்கு இணையான நாண்களை $y = mx$ என்ற விட்டம் இரு சம கூருக்கும்.

இம் மாதிரியான சோடி விட்டங்களை துணை விட்டங்கள் (conjugate oliameters) என்று கூறுவர்.

§ 93·9. *CP, CD* **என்பவை துணை அரை விட்டங்கள் (Conjugate semi diameters) என்ருல், *P, D* ஆகிய புள்ளிகளின் மைய வகற்சிக் கோணங்களின் வித்தியாசம் ஒரு செங்கோணம் ஆகும்.**

P, D ஆகியவற்றின் ஆ. தொ. முறையே $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ என்போம்.

$$CP\text{-யின் சரிவு} = \frac{b \sin\theta}{b \cos\theta} = m.$$

$$CD\text{-யின் சரிவு} = \frac{b \sin\varphi}{a \cos\varphi} = m' \text{ என்போம்.}$$

CP, CD துணை அரை விட்டங்கள் ஆதலால்

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}$$

அதாவது $\dfrac{b \sin\theta \cdot b \sin\varphi}{a \cos\theta \cdot a \cos\phi} = -\dfrac{b^2}{a^2}$

அதாவது $\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi = 0$

அதாவது $\cos(\theta \sim \varphi) = 0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \theta \sim \phi = \frac{\pi}{2}$$

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்றால்

$D\left[a\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right), b\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ அல்லது $(-a\sin\theta,$ $b\cos\theta)$ ஆகும்.

குறிப்பு: P, D ஆகியவற்றின் ஒத்த புள்ளிகள் (corresponding points) முறையே P', D' என்றால் $P'\hat{C}D' = 90^\circ$

§ 93·10. $CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$ (மாறிலி)

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்றால் $D(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \quad CP^2 + CD^2 &= (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \\ &\quad + (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

குறிப்பு: துணை விட்டங்களின் நீளங்கள் சமம் என்றால்,

$$CP = CD$$

$$\therefore \quad a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$a^2 \neq b^2 \qquad \therefore \quad \cos^2\theta = 0$

$$\therefore \qquad \theta = \pm \frac{\pi}{4} \text{ அல்லது } \pm \frac{3\pi}{4}$$

அதாவது, சமநீள துணை விட்டங்களின் (equi-conjugate diameters) முனைப்புள்ளிகளின் மையவகற்சி கோணம் $\pm \frac{\pi}{4}$ அல்லது $\pm \frac{3\pi}{4}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

மேலும், $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்றால்,

$$CP^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + b^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$\therefore \quad CP = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad P'CP = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

அதாவது சமநீள துணைவிட்டங்களின் நீளம் $= \sqrt{2(a^2+b^2)}$

§ 93·11. $SP \cdot S'P = CD^2$

$$SP = a(1-e\cos\theta); \quad S'P = a(1+e\cos\theta)$$

$$\therefore \quad SP \cdot S'P = a^2(1-e^2\cos^2\theta) = a^2 - a^2e^2\cos^2\theta$$
$$= a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$
$$= CD^2$$

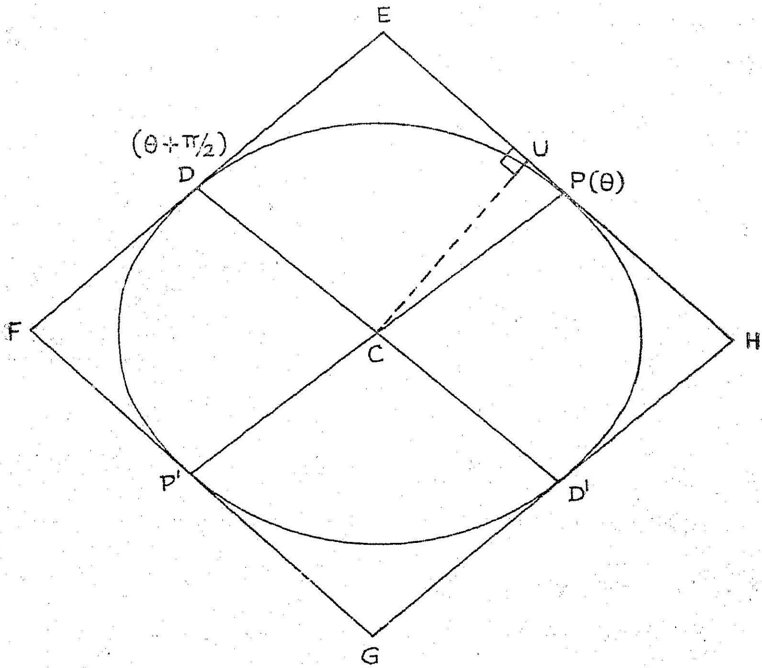
§ 93·12. துணை விட்டங்களின் இரு சோடி முனைப் புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் மாறாத பரப்புடைய (constant area) ஒரு இணைகரத்தைத் தரும்

PCP', DCD' என்பவை துணைவிட்டங்கள் என்போம்.

P, P' என்ற புள்ளிகள் ஆதி C-க்கு சமச்சீர் (symmetry) என்பதால் P, P'-களில் தொடும் தொடுகோடுகள் இணையானவை (படம் 63).

இதே காரணத்தால் D, D'-களில் தொடும் தொடுகோடுகள் இணையானவை.

எனவே மேற்கண்ட முனைப் புள்ளிகள் P, D, P', D' ஆகியவற்றில் தொடும் தொடுகோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை உண்டாக்கும்.



படம் 63.

அந்த தொடுகோடுகள் E, F, G, H என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்தால்

$$\text{இணைகரம் } EFGH = 4 \times \text{இணைகரம் } CPED$$

$$= 4 \times PE \times CU \; (CU \perp PE)$$

$$= 4 \,.\, CD \,.\, \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

$$= 4 \,.\, CD \,.\, \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$= 4 \,.\, CD \,.\, \frac{ab}{CD}$$

$$= 4\,ab \text{ (மாறிலி)}$$

மாதிரிக் கணக்கு 1.

(1, 2) என்ற புள்ளி குவியமாகவும், $2x - 3y + 6 = 0$ என்ற கோடு அதற்கேற்ற இயக்குவரையாகவும், மையவகற்சி $\frac{2}{3}$ ஆகவும் உள்ள நீள் வட்டம் யாது?

குவியம் $S(1, 2)$, $e = \frac{2}{3}$.

நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ லிருந்து இயக்கு வரைக்கு ⊥ ஆக PM வரைக.

$$PM = \frac{2x_1 - 3y_1 + 6}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2x_1 - 3y_1 + 6}{\sqrt{13}}$$

நீள் வட்டத்தின் வரைவிலக்கணப்படி

$$SP^2 = e^3 \cdot PM^2$$

அதாவது $(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = \frac{4}{9} \frac{(2x_1 - 3y_1 + 6)^2}{13}$

எனவே நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு (கீழ்க்குறி 1-ஐ நீக்கிய பின்பு) $117 [(x_1 - 1)^2 + (y - 2)^2] = 4(2x - 3y + 6)^2$

அதாவது $101x^2 + 81y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 7 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மையம், நெட்டச்சு, குற்றச்சு, செவ்வகலம், மையவகற்சி குவியம் ஆகியவற்றைக் காண்க. (B. E. '59)

கொடுத்த சமன்பாட்டைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$2(x^2 - 4x) + 3(y^2 + 2y) = -7$$

அதாவது $2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = -7 + 8 + 3 = 4$

அதாவது $\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1$ ... ... (1)

இப்போது ஆதியை $(2, -1)$ என்ற புள்ளிக்கு மாற்றி (X, Y) என்பதை நடப்பு ஆ. தொலைகளாகக் கொண்டால்

$x = 2 + X$, $y = -1 + Y$ ... (2)

எனவே சமன்பாடு (1) பின்வருமாறு வடிவம் பெறும்

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1$$

அதாவது $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ... (3)

இங்கே $a = \sqrt{2}$, $b = 2/\sqrt{3}$

நீள் வட்டம் (3)-ன் மையம் $X = 0$, $Y = 0$

$\therefore$ நீள் வட்டம் (1)-ன் மையம் $x = 2$, $y = -1$

நெட்டச்சு $= 2a = 2\sqrt{2}$

குற்றச்சு $= 2b = 4/\sqrt{3}$

செவ்வகலம் $= \frac{2b^2}{a} = 2 \cdot \frac{4}{3} \Big/ \sqrt{2} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

மையவகற்சி $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2 - \frac{4}{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

நீள்வட்டம் (3)-ன் குவியம் $X = ae$, $Y = 0$

$\therefore$ நீள்வட்டம் (1)-ன் குவியம் $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y = -1$

எனவே கொடுத்த நீள்வட்டத்தின்

மையம் (2, 1), குவியம் $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0\right)$

நெட்டச்சு $= 2\sqrt{2}$; குற்றச்சு $= 4/\sqrt{3}$

செவ்வலகம் $= \frac{8}{3\sqrt{2}}$; மையவகற்சி $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

ஒரு குகைவழி அரை நீள்வட்ட வடிவத்தில் (in the form of a semi-ellipse) அமைந்துள்ளது. அதன் நெட்டச்சு 34 அடி அகல சாலையுடன் பொருந்தியுள்ளது. 6 அடி உயரமுள்ள ஒரு மனிதன் சாலையின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் நின்றால் அவனுடைய தலை சரியாக குகையைத் தொடுகிறது. அந்தக் குகைவழியின் மிகப் பெரிய உயரம் எது?

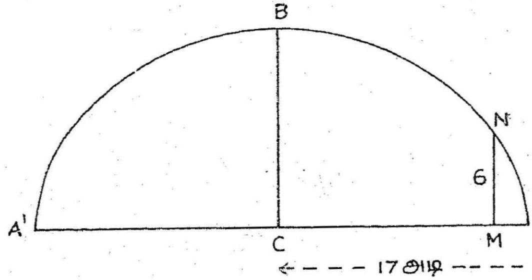
AA' = சாலையின் அகலம்

= நெட்டச்சு

$= 2a = 34$ அடி

$\therefore \quad a = 17$ அடி

வேண்டிய உயரம் $CB = b =$ அரை குற்றச்சு



படம் 64.

எனவே $\dfrac{x^2}{17^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

$MA = 2$ அடி (எடுகோள்)

$\therefore \quad CM = 17 - 2 = 15, \quad MN = 6$

$\therefore \quad N$-ன் ஆ. தொ. $(15, 6)$

இதை (1)-ல் பிரதியிட்டால்

$$\frac{15^2}{17^2} + \frac{6^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad b = \frac{51}{4}$$

எனவே குகை வழியின் மிகப் பெரிய உயரம் $= 12\frac{3}{4}$ அடி

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு, நெட்டச்சின் முனைப் புள்ளிகள் A, A' ஆகியவற்றில் தொடும் தொடுகோடுகளை L, M களில் வெட்டுகிறது. $AL \cdot A'M = b^2$ என்று நிறுவுக.

$P\,(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ என்றால், தொடுகோடு LPM-ன் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ ... ... (1)

A-யில் தொடும் தொடுகோடு $x = a$ ... ... (2)

A'-ல் தொடும் தொடுகோடு $x = -a$ ... ... (3)

(1), (2) ஆகியவற்றின் தீர்வு காணில்,

$$\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

அதாவது $y = \frac{b\,(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = AL$

(1), (3) ஆகியவற்றின் தீர்வு காணில்

$$y = \frac{b\,(1+\cos\theta)}{\sin\theta} = A'M.$$

$$\therefore\ AL \cdot A'M = \frac{b^2\,(1-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta} = b^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 5 :

$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சை G-யில் வெட்டுகிறது. PG-யின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$\frac{4x^2}{a^2\,(1+e^2)} + \frac{4y^2}{b^2} = 1$$ என்று நிறுவுக.

$P\,(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இதை நெட்டச்சு $y = 0$-வுடன் தீர்வு காணில்

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta = a\,e^2\cos\theta$$

$\therefore\ G\,(a\,e^2\cos\theta,\ 0)$ ஆகும்.

$M(x_1, y_1)$ என்பது PG-யின் நடுப்புள்ளி என்றால்

$$x_1 = \frac{1}{2}[a\cos\theta + ae^2\cos\theta]$$

அதாவது $x_1 = \frac{1}{2}a\cos\theta(1 + e^2)$

$$y_1 = \frac{1}{2}b\sin\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2x_1}{a(1+e^2)}, \ \sin\theta = \frac{2y_1}{b}$$

வர்க்கம் எடுத்து கூட்டினால் θ விலகிவிடும்.

$$\therefore \quad 1 = \frac{4x_1^2}{a^2(1+e^2)^2} + \frac{4y_1^2}{b^2}$$

அதாவது $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$\frac{4x^2}{a^2(1+e^2)^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1$$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்ற நீள்வட்டத்தின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோட்டு நாணின் (normal chord) நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2}\right) = (a^2 - b^2)^2$$

என நிறுவுக.

$P(a\cos\theta. \ b\sin\theta)$, PQ வரைச் செங்கோட்டு நாண், $M(x_1\ y_1)$ அதன் நடுப்புள்ளி என்போம்.

PQ-வை P-யில் வரைச் செங்கோடு என்ற முறையில் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \qquad \ldots \qquad (1)$$

M-ஐ நடுப்புள்ளியாக உடைய நாண் என்ற முறையில் PQ-வின் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$

அதாவது $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$ ... (2)

$$a^2 - b^2 = c,\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = k \text{ என்போம்.}$$

(1)-ம் (2)-ம் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{x_1/a^2}{a/\cos\theta} = \frac{y_1/b^2}{-b/\sin\theta} = \frac{k}{c}$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{ka^3}{ck_1};\quad \sin\theta = \frac{-kb^3}{cy_1}$$

θ-வை விலக்க, வர்க்கமெடுத்துக் கூட்டுக.

$$1 = \frac{k^2}{c^2}\left[\frac{a^6}{x_1^2} + \frac{b^6}{y_1^2}\right]$$

அதாவது, $(a^2-b^2) = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2 \left[\frac{a^6}{x_1^2} + \frac{b^6}{y_1^2}\right]$

எனவே $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2}\right) = (a^2 - b^2)^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 7 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின்மேல் P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு குற்றச்சை (minor axis) Q என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. S, S' குவியங்கள் என்றால்,

$$PQ^2 - SQ^2 = SP \cdot S'P = CD^2$$

என நிறுவுக. (CD என்பது CP-யின் துணை அரைவிட்டம்)

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதை $x = 0$-வுடன் (குற்றச்சு) தீர்வு காணில்,

$$y = -\frac{(a^2 - b^2)}{b}\sin\theta$$

அதாவது $Q\left[0, -\frac{-a^2-b^2}{b}\sin\theta\right]$ ஆகும்.

$$\therefore\quad PQ^2 = (a\cos\theta - 0)^2 + \left(b\sin\theta + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right)^2$$

$$= a^2\cos^2\theta \left[\frac{b^2\sin\theta + (a^2-b^2)\sin\theta}{b}\right]^2$$

$$= a^2\cos^2\theta + \frac{a^4}{b^2}\sin^2\theta$$

$$= \frac{a^2}{b^2}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)$$

அதாவது $PQ^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot CD^2$

[$\because$ D-யின் ஆ. தொ. $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$]

மேலும் $SQ^2 = (ae-0)^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)^2\sin^2\theta$

$$= (a^2-b^2) + \frac{(a^2-b^2)^2}{b^2}\sin^2\theta$$

$$= \frac{a^2-b^2}{b^2}[b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\theta]$$

$$= \frac{a^2-b^2}{b^2}[a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta]$$

$$= \frac{a^2-b^2}{b^2}\cdot CD^2$$

$$\therefore\quad PQ^2 - SQ^2 = \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2-b^2}{b^2}\right)\cdot CD^2$$

$$= CD^2$$

ஆனால் $SP\,.\,S'P = CD^2$ (§ 93·11)

$$\therefore\quad PQ^2 - SQ^2 = SP\,.\,S'P = CD^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 8.

ஒரு வட்டம் ஒரு நீள்வட்டத்தைப் பொதுவாக நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அந்த நான்கு புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களின் கூட்டுப் பலன் $= 2n\pi$ என்று நிறுவுக.

(n ஏதேனும் ஒரு முழு எண்)

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

என்னும் வட்டம், $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad (2)$

என்ற நீள்வட்டத்தை வெட்டும் ஒரு புள்ளி $P\,(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ என்போம். இதனால் P-யின் ஆ. தொ. (1)-ஐச் சமனடையச் செய்யவேண்டும்.

$$\therefore\quad a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ga\cos\theta + 2fb\sin\theta + c = 0$$

இதில் $t = \tan\dfrac{a}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

எனப் பிரதியிட்டால்

$$a^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 2ga\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 2fb\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + c = 0$$

அதாவது $t^4\,(a^4 - 2ga + c) + 4bft^3$
$+ 2\,(c + 2b^2 - a^2)\,t^2 + 4bft + (a^2 + 2ag + c) = 0 \quad \ldots \quad (3)$

இது நான்குபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் இதற்குப் பொதுவாக நான்கு மூலங்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 உண்டு. t ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தகுந்தபடி, வட்டத்திற்கும் நீள் வட்டத்திற்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி அமையும். எனவே, வட்டம் (1), நீள் வட்டம் (2)-ஐப் பொதுவாக 4 புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இங்கே $t_1 = \tan\left(\dfrac{\theta_1}{2}\right)$, $t_2 = \tan\left(\dfrac{\theta_2}{2}\right)$ முதலியன.

இப்போது $\tan\left(\dfrac{\theta_1}{2} + \dfrac{\theta_2}{2} + \dfrac{\theta_3}{2} + \dfrac{\theta_4}{2}\right)$

$$= \frac{\Sigma t_1 - \Sigma t_1 t_2 t_3}{1 - \Sigma t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3 t_4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆனால் சமன்பாட்டுக் கொள்கைப்படி

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3 = \frac{-4bf}{a^4 - 2ga + c}$$

$\therefore$ (4)-ன் வலப்பக்கத்துத் தொகுதி $= 0$,

ஆனால் பகுதி $\neq 0$.

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}\right) = 0 = \tan(n\pi)$$

$$\therefore \quad \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi$$

அதாவது $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2n\pi$

அதாவது நான்கு வெட்டும் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களின் கூட்டல் பலன் $2n\pi$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 9.

CP, CD என்பதை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்கள் என்ருல் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) PD எப்போதும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ என்ற நீள்வட்டத்தைத் தொடும்.

(ii) PD-யின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதையும் மேற்படி நீள் வட்டம்தான்.

P, D ஆகியவற்றின் மையவகற்சிக் கோணங்கள் θ, $\theta + \frac{\pi}{2}$ என்போம்.

$\therefore$ PD-யின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta + \theta + \pi/2}{2}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta + \theta + \pi/2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta - \theta - \pi/2}{2}\right)$$

அதாவது $\frac{x}{a}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

அல்லது $lx + my + n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

இங்கே $l = \frac{1}{a}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$$m = \frac{1}{b}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

பின்பு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ ... ... (2)

என்ற நீள்வட்டத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2')$$

இங்கே $A = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{b}{\sqrt{2}}$

(1)-ஐக் குறிக்கும் கோடு (2′)-ஐக் குறிக்கும் நீள் வட்டத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை,

$$A^2 l^2 + B^2 m^2 = n^2$$

அதாவது $\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$$+ \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{b^2} \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

இது சமனடைகிறது.

ஆக இந்த நிபந்தனை நிறைவேறுவதால் PD என்ற நாண் நீள்வட்டம் (2′)-ஐத் தொடுகிறது.

(ii) $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்றால் D-யின் ஆ. தொ.

$$\left[a\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), b\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$M(x_1, y_1)$ என்பது PD-யின் நடுப்புள்ளி என்றால்

$$x_1 = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\theta\right]$$

$$= a \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

அதாவது $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

மேலும் $y_1 = \frac{b}{2}\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\theta\right]$

$$= b \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

அதாவது $y_1 = \frac{b}{\sqrt{2}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,x_1}{a}\,;\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,y_1}{b}$$

வர்க்கமெடுத்து கூட்டினால் θ விலகும்.

$$1 = \frac{2x_1^2}{a^2} + \frac{2y_1^2}{b^2}$$

$\therefore$ $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

குறிப்பு: (i), (ii) இவைகளிலிருந்து PD என்ற நாண்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

என்ற நீள்வட்டத்தைத் தொடும்புள்ளி PD-யின் நடுப்புள்ளி என்று தெளிவாகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 10.

CP, CD என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்கள் என்றால் P, D-களில் வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)^2\,(a^2x^2 - b^2y^2)^2$$

என்று நிறுவுக.

P-யின் மையவகற்சிக் கோணம் θ என்றால் D-யின் மையவகற்சிக்கோணம் $\theta + \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 = c \text{ என்போம் } \quad \dots \quad (1)$$

D-யில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos(\theta + \pi/2)} - \frac{by}{\sin(\theta + \pi/2)} = c$$

அதாவது $\frac{by}{\cos\theta} + \frac{ax}{\sin\theta} = -c$ ... (2)

(1)-ம் (2)-ம் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப் பாதையைப் பெற வேண்டுமானுல் இவைகளில் இருந்து θ-வை விலக்கவேண்டும்.

(1)-ஐ ax-ஆல் பெருக்கி, (2)-ஐ by-ஆல் பெருக்கி பின்பு கூட்டுக.

$$\frac{a^2x^2 + b^2y^2}{\cos\theta} = c\,(ax - by)$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{c\,(ax - by)} \qquad \ldots \qquad (3)$$

(1)-ஐ by-ஆல் பெருக்கி, (2)-ஐ ax-ஆல் பெருக்கி பின்பு கழிக்கவும்.

$$-\frac{a^2x^2 + b^2y^2}{\sin\theta} = c\,(ax + by)$$

$$\therefore \quad \sin\theta = -\frac{(a^2x^2 + b^2y^2)}{c\,(ax + by)} \qquad \ldots \qquad (4)$$

இப்போது θ-வை விலக்க (3), (4) ஆகியவற்றின் வர்க்கம் எடுத்துக் கூட்டுக.

$$1 = \frac{(a^2x^2 + b^2y^2)^2}{c^2}\left[\frac{(ax + by)^2 + ax - by)^2}{(a^2x^2 - b^2y^2)^2}\right]$$

அதாவது $c^2\,(a^2x^2 - b^2y^2)^2$

$$= (a^2x^2 + b^2y^2)^2\,(2a^2x^2 + 2b^2y^2)$$

எனவே, நாம் விரும்பிய நியமப் பாதை

$$2\,(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)^2\,(a^2x^2 - b^2y^2)^2$$

பயிற்சி 7.

1. கீழே கொடுத்துள்ளவைகளைப் பயன்படுத்தி நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(a) குவியம் (0, 0), மையவகற்சி $\frac{5}{6}$, இயக்குவரை $3x + 4y = 1$

(b) குவியம் (2, 5), மையவகற்சி $\frac{2}{5}$, இயக்குவரை $x + y = 1$

(c) குவியம் (1, 2), மையவகற்சி $\frac{3}{4}$, இயக்குவரை $3x + y - 3 = 0$

(d) குவியம் $(-1, +1)$, மையவகற்சி $\frac{1}{2}$, இயக்குவரை $1 - y + 3 = 0$

(e) குவியங்கள் (4, 0) (−4, 0), மையவகற்சி $\frac{1}{3}$

(f) செவ்வகலம் 5, மையவகற்சி $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. கீழ் வரும் நீள் வட்டங்களின் மையம், மையவகற்சி, குவியங்கள், செவ்வகலம் காண்க.

(a) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (B. E. '65)

(b) $4(x-1)^2 + 3y^2 = 4$

(c) $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$

(d) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

3. ஒரு குகைவழி அரை நீள் வட்டவடிவில் அமைந்துள்ளது. அதன் நெட்டச்சு 80 அடி அகலமுடைய சாலையின்மேல் பொருந்தியுள்ளது அதன் மிகப் பெரிய உயரம் 30 அடி என்றால் சாலையின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 15 அடி தூரத்தில் குகையின் உயரம் என்ன?

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் நாண் PQ, மையத்திலிருந்து c தூரத்தில் உள்ளது. PQ-வின் இசைப் புள்ளியின் நிமயப்பாதை $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{c^2}$ என நிறுவுக.

5. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right.$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து$\left.\right)$ தொடுநாண் மையத்தில் ஒரு செங்

கோணத்தில் எதிர்கொள்கிறது. P-யின் நியமப்பாதை ஒரு நீள் வட்டம் என்றும் அதன் நெட்டச்சு, குற்றச்சு முறையே

$$2\sqrt{\frac{a}{b}(a^2+b^2)}, \quad 2\sqrt{\frac{b}{a}(a^2+b^2)}$$

என்று நிறுவுக. (B. Tech. '72, B. E. '51)

6. ஒரு வட்டத்தின் குவியங்கள் S, S'; நெட்டச்சின் முனைப் புள்ளிகள் A, A'; மையம் C. நீள்வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு தொடுகோட்டிற்கு S, S', A, A', C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே s, s', a, a', c ஆகும். $ss' - c^2 = e^2(aa' - c^2)$ என்று நிறுவுக. (e மையவகற்சி)

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு துணைவட்டத்தைத் (auxiliary cricle) தொடுகிறது என்றால் P-யின் நியமப்பாதை யாது ?

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து $P(x_1, y^2)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தைத் (director circle) தொடுகிறது என்றால் P-யின் நியமப் பாதை யாது ?

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தைக் குறித்து $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப் பாதை,

$$r^2\left\{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right\} = \left(\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} - 1\right)^2$$

என நிறுவுக.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் நாண்கள் $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ என்ற மற்றொரு நீள்வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. அந்த நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை யாது ?

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = (a+b)$ என்ற நீள்வட்டத்தை P, Q-களில் வெட்டுகிறது. PQ-வின் இசைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = (a+b)^2$ என்று காண்பிக்கவும். மேலும் P, Q என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் செங்குத்தாக உள்ளன என்றும் காண்பிக்கவும். (B. E. '62)

12. φ_1, φ_2 என்பவை ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியநாணின் மூலைப் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள் எனில்

$$\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = e\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

என்று நிறுவுக.

13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 = c^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுநாண்கள் $a^2x^2 + b^2y^2 = c^4$ என்ற நீள்வட்டத்தைத் தொடும் என்று காண்பிக்கவும்.

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் வரைச் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை யாது? (B. Tech. '65, B. E. '60 '63)

15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் நாண்கள் மையத்தில் செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்கின்றன. அந்த நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை யாது?

16. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின்மேல் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுநாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$ என்று நிறுவுக.

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் (director circle) மேல் உள்ள புள்ளிகளி

லிருந்து மேற்படி நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுநாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$ என நிறுவுக.

18. கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடுகளின் அடிகள் (feet of the normals) ஒரு கூம்பு வளைவின்மேல் அமையும் என்றும், அந்த கூம்பு வளைவு, கொடுத்துள்ள புள்ளி வழியாகவும் நீள் வட்டத்தின் மையம் வழியாகவும் செல்லுகிறது என்றும் காண்பிக்கவும்.

19. PQ என்பது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் வரைச் செங்கோட்டு நாண் என்போம். $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ என்ற வட்டத்தைக் குறித்து PQ-வின் இசைப்புள்ளியின் நியமப் பாதை $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ என நிறுவுக.

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சு, குற்றச்சுகளை G, g என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. Gg-யின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை $a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$ என்ற மற்றொரு நீள் வட்டமாகும் என்று காண்பிக்கவும்.

21. ஒரு நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடும் வரைச் செங்கோடும் குற்றச்சை T, G என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. S, S' என்பவை குவியங்கள் என்றால் $T\hat{S}G = T\hat{S'}G = 90°$ என நிறுவுக. (B. E. '66)

22. ஒரு நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு குற்றச்சை G என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. C என்பது மையம், PN என்பது குற்றச்சுக்குச் செங்குத்து என்றால் $CG = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot CN$ என்று நிறுவுக. (e = மையவகற்சி)

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சை G-யில் வெட்டுகிறது. S, S' குவியங்கள் என்றால் $PG^2 = (1 - e^2)\ SP \cdot S'P$ என்று நிறுவுக. (e = மையவகற்சி) (B. Tech. '72)

24. ஒரு நீள் வட்டத்தின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சை G-யில் வெட்டுகிறது CF என்பது மையம் C-யிலிருந்து மேற்படி வரைச் செங்கோட்டுக்கு ⊥ தூரம். $PF \cdot PG = b^2$ என்று காண்பிக்கவும்.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் நாண் AB, x-அச்சை P யிலும் y-அச்சை Q-விலும் வெட்டுகிறது. O என்பது ஆதி. $\frac{a^2}{OP} + \frac{b^2}{OQ} = k$ (மாறிலி) என்றால் AB-யின் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை யாது? (B. Tech. '70)

26. P என்ற நிலையான புள்ளி (fixed point) வழியாகச் செல்லுமாறு ஒரு நீள் வட்டத்தின் நாண்கள் வரையப்படுகின்றன. இந்த நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை மற்றொரு நீள் வட்டமாகும் என்று காண்பிக்கவும் மேலும் இந்த நீள் வட்டத்தின் மையமானது கொடுத்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தையும் P-யையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டை இரு சம கூறாக்கும் என்று நிறுவுக.

27. ஒரு வட்டம் ஒரு நீள் வட்டத்தை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. சோடியாக எடுக்கப்பட்ட பொது நாண்கள் நீள் வட்டத்தின் அச்சுகளுக்கு சமகோணத்தில் உள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

28. கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் அடிகள் (feet of the normals) P, Q, R, S என்ற புள்ளிகள் என்பன. P, Q, R என்ற மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் நீள் வட்டத்தை மீண்டும் S' என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. S-ம், S'-ம் நீள் வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என்று நிறுவுக.

29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு நெட்டச்சு, குற்றச்சுகளை G, g என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் $PG : Pg = b^2 : a^2$ என நிறுவுக.

30. ஒரு நீள் வட்டத்தின் செவ்வகல முனைப் புள்ளிகளில் (ends of the latus rectum) வரைச் செங்கோடுகள் குற்றச்சின் முனைப் புள்ளிகள் வழியாகச் சென்றால் அந்த நீள் வட்டத்தின் மையவகற்சி $e^4 + e^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும் என்று நிறுவுக.

31. $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தை P, D என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. C என்பது மையம் ; CP, CD என்பவை துணை அரை விட்டங்கள் என்றால் $a^2 l^2 + b^2 m^2 = 2n^2$ என்று காண்பிக்கவும்.

32. CP, CD என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்கள் என்றால் P, D என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மேல் வெட்டும் என்று காண்பிக்கவும். (B. E. '53)

33. CP, CD என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்களாகும். CR என்பது PD-க்கு $\perp$ ஆகும். R-ன் நியமப்பாதை $a^2x^2 + b^2y^2 = 2(x^2 + y^2)^2$ என நிறுவுக.

34. CP, CD என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்களாகும். CP, CD ஆகியவற்றை விட்டங்களாக உடைய வட்டங்கள் R-ல் வெட்டுகின்றன. R-ன் நியமப்பாதை $a^2x^2 + b^2y^2\ 2(x^2 + y^2)^2$ என நிறுவுக.

35. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. என்றால் CP, CQ என்பவை துணை விட்டங்களாகும் என நிறுவுக.

36. CP, CD என்பவை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்களாகும். கோணம் $P\hat{C}D$ மிகச் சிறியது (minimum) என்றால் $CP = CD$ என்றும் அந்த மிகச் சிறிய கோணத்தின் மதிப்பு $\tan^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)$ என்றும் காண்பிக்கவும்.

37. CP, CD என்பவை ஒரு நீள்வட்டத்தின் துணை அரை விட்டங்கள் என்போம். P, D என்ற புள்ளிகளில் வரைச் செங்

கோடுகள் நெட்டச்சை P', D' என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $(PP')^2 + (LD')^2 = a^2(1-e^2)(2-e^2)$ என்று காண்பிக்கவும். (e = மையவகற்சி)

விடைகள்

1. (a) $27x^2 + 20y^2 - 24xy + 6x + 8y - 1 = 0$

(b) $7x^2 - 4xy + 7y^2 - 32x - 86y + 259 = 0$

(c) $79x^2 - 54xy + 151y^2 - 158x - 556y + 719 = 0$

(d) $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

(e) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(f) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. (a) $(0, 0), \frac{\sqrt{7}}{4}, (\pm\sqrt{7}, 0), \frac{9}{5}$

(b) $(1, 0), \frac{1}{2}, \left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \sqrt{3}$

(c) $(-1, 1)\ \frac{1}{2}, (0, 1), (-2, 1), 3$

(d) $(6, -4), \frac{\sqrt{5}}{6}, (6 \pm 2\sqrt{5}, -4), \frac{16}{3}$

3. $\frac{15}{4}\sqrt{55}$ அடி.

7. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2}$

8. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$

10. $\frac{\alpha^2 x^2}{a^4} + \frac{\beta^2 y^2}{b^4} = 1$

14. $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$

15. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}$

25. $x + y = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$

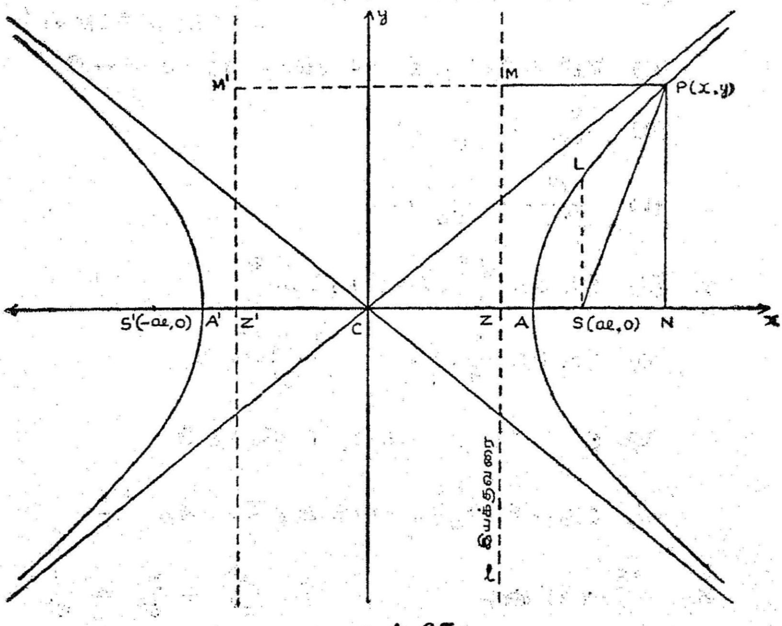
துணை அதிகாரம் 8.

அதிபரவளைவு

(Hyperbola)

§ 94. நியம வடிவத்தில் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு (Standard Equation of a Hyperbola).

மையவகற்சி $e > 1$ உள்ள கூம்பு வளைவிற்கு அதிபரவளைவு என்று பெயர்.



படம் 65.

குவியம் S, இயக்குவரை l என்போம். இயக்குவரைக்கு ⊥ ஆக SZ வரைக.

SZ-ஐ A, A' என்ற புள்ளிகளால் உள்ளிலும் புறத்திலும் $e : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கவும்.

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

எனவே A, A' என்ற புள்ளிகள் அதிபரவளைவின் மேல் உள்ளன

என்று தெளிவாகிறது. C என்பது AA'-ன் நடுப்புள்ளி என்போம். $AA' = 2a$ என்ருல் $CA = CA' = a$ ஆகும்.

C-யை ஆதியாகவும் CS-ஐ x-அச்சாகவும், CS-க்கு $\perp$ ஆக Cy-ஐ y-அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

$$SA = e \cdot AZ \quad \text{அதாவது,} \quad CS - CA = e \cdot (CA - CZ)$$

மேலும்,

$$SA' = e \cdot A'Z \quad \text{அதாவது,} \quad CS + CA = e\,(CA' + CZ)$$

$$\therefore \quad 2\,CS = e \cdot 2a \quad \text{அதாவது,} \quad CS = ae$$

மேலும், $2a = e \cdot 2\,CZ$ அதாவது, $CZ = \dfrac{a}{e}$

$P(x, y)$ என்பது அதிபரவளைவின்மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்போம். x-அச்சுக்கு $\perp^r$ ஆக PN, இயக்குவரைக்கு $\perp$ ஆக PM வரைக.

$$\therefore \quad CN = x, \quad NP = y, \quad S\,(ae, 0)$$

$$PM = NZ = CN - CZ = x - \frac{a}{e}$$

அதிபரவளைவின் விரைவிலக்கணப்படி,

$$SP^2 = e^2 \cdot PM^2$$

$$\therefore \quad (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e} \right)^2$$

அதாவது $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

அதாவது $x^2\,(e^2 - 1) - y^2 = a^2\,(e^2 - 1)$

அலாவது $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2\,(e^2 - 1)} = 1 \quad (e > 1)$

$e > 1$ என்பதால் $b^2 = a^2\,(e^2 - 1)$ என்பது $+$ மதிப்பைப் பெறும்.

$\therefore$ b ஒரு மெய்க் கணியம்

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு (நியம வடிவத்தில்)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

குறிப்பு : (1) எழுதுவதற்கு எளிதாயிருப்பதற்காக இனி அதிபரவளைவு என்பதை "அ. வளைவு" என்று குறிப்பிடுவோம்.

(2) அ. வளைவின் சமன்பாடு (A)-யில் (x, y) என்பதற்குப் பதிலாக $(x, -y)$ அல்லது $(-x, y)$ அல்லது $(-x, -y)$ இட்டாலும் அதாவது சமன்பாடு சமனடையும். எனவே, அ. வளைவு x-அச்சு, y-அச்சு ஆகிய இரு அச்சுகளுக்கும், ஆதியாகிய புள்ளிக்கும் சமச்சீருள்ளவை.

(3) சமன்பாடு (A)-யை $y = 0$-வுடன் (அதாவது x-அச்சுடன்) தீர்வு காணில், அதாவது அ. வளைவு $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டும் என்பதை அறியலாம்.

ஆனால், $x = 0$-வுடன் தீர்வு காணில் $y^2 = -b^2$ அதாவது $y = \pm ib$. எனவே, அ. வளைவு y-அச்சை $B(0, ib)$, $B'(0, -ib)$ என்ற கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$x \to \pm \infty$ என்றால், $y \to \pm \infty$ ஆகும். எனவே, அ. வளைவு ஒரு திறந்த வளைகோடு (hyperbola is an ooen curve).

மேலும் அ. வளைவுக்கு இரண்டு கிளைகள் (branches) உண்டு.

(4) $AA' = 2a$. இதைக் குறுக்கச்சு (transvers axis) என்பர் ; $BB' = 2b$, துணையச்சு (conjugate axis) என்பர்,

C-யை அதிபரவளைவின் மையம் என்றும் C வழியாகச் செல்லும் நாண்களை விட்டங்கள் என்றும் கூறுவர்.

(5) குவியம் $S(ae, 0)$ என்றால் அதற்கேற்ற இயக்குவரை $x = \frac{a}{e}$ ஆகும். அ. வளைவு சமச்சீருள்ளது என்பதால் அதற்கு $S'(-ae, 0)$ என்ற மற்றொரு குவியமும் அதற்கேற்ற $x = -\frac{a}{e}$ என்ற மற்றொரு இயக்கு வரையும் உண்டு.

(6) குவியம் S அல்லது S' வழியாக அ. வளைவுக்கு உள்ள நிலைத் தூரம் SL-ஐ அரைச் செவ்வகலம் (semi-latus rection) என் பெறயர் பெறும்.

L-ன் ஆ. தொ. (ae, SL) அ. வளைவின் சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்யும்.

$$\therefore \quad \frac{b^2e^2}{a^2} - \frac{SL^2}{b^2} = 1 \qquad \therefore \quad SL^2 = b^2(e^2 - 1)$$

ஆனால் $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$$\therefore \quad SL^2 = b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

அதாவது $SL = \frac{b^2}{a^2}$

$$\therefore \quad \text{செவ்வகலம்} = \frac{2b^2}{a}$$

7. மையவகற்சி $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$

8. $e = \sqrt{2}$ உடைய அ. வளைவுக்கு செவ்வக அதிபரவளைவு என்று பெயர்; மேலும் $e = \sqrt{2}$ என்றால் $a = b$ ஆகும்.

§ 95. குறியீடு (Notation)

முந்தைய துணை அதிகாரங்களில் பயன்படுத்தியதுபோல் இந்தத் துணை அதிகாரத்திலும் பின்வரும் குறியீடுகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ என்றால்}$$

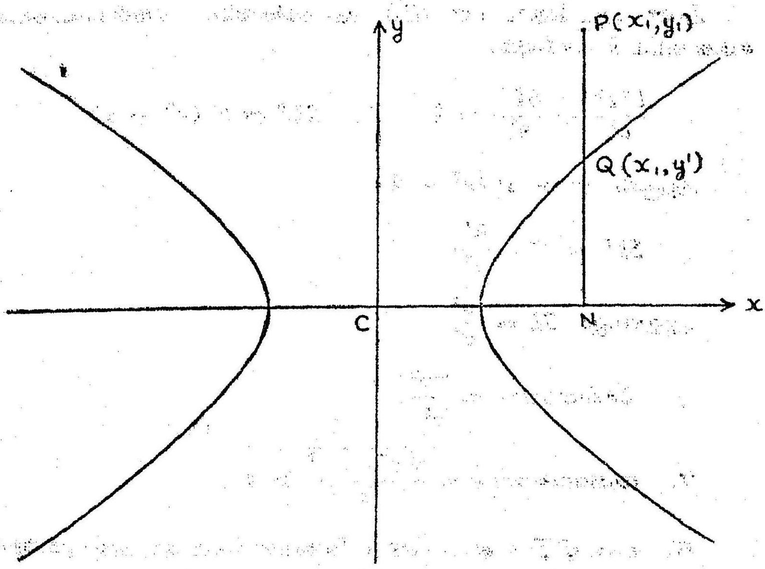
$$S_1 \equiv \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

$$S_{12} \equiv \frac{x_1x_2}{a^2} - \frac{y_1y_2}{b^2} - 1$$

$$S_{11} \equiv \frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} - 1$$

§ 96. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவைக் குறித்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி அமையும் நிலை

$P(x_1, y_1)$-லிருந்து x-அச்சுக்கு $\perp$ ஆக PN வரைக. PN என்பது அ. வளைவை $Q(x_1\ y')$-ல் வெட்டட்டும்.



படம் 66.

$Q(x_1, y')$ என்பது அ. வளைவின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆதலால், $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \quad (y')^2 = b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இப்போது P என்ற புள்ளி அ. வளைவின் வெளியே, மேல் அல்லது உள்ளே இருந்தால்,

முறையே $\quad PN^2 \gtreqless QN^2$

அதாவது $\quad y_1^2 \gtreqless (y')^2$

அதாவது $\quad y_1^2 \gtreqless b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right)$ [சமன்பாடு (1)]

அதாவது $\quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \lesseqgtr 1$

அதாவது $\quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \lesseqgtr 1$

அதாவது $\quad S_{11} \lesseqgtr 1$

§ 97. முக்கியக் குறிப்பு

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து b-ஐ $-b^2$ என மாற்றி எழுதினால் கிடைக்கும். எனவே நீள் வட்டத்தைச் சேர்ந்த சூத்திரங்களிலும் b^2 என்பதற்குப் பதிலாக $-b^2$ எனப் பிரதியிட்டால் அதிபரவளைவின் சூத்திரங்கள் கிடைக்கும். ஆகையால் கீழே அதிபரவளைவைச் சேர்ந்த சில முக்கியமான சூத்திரங்கள் நிறுவல்கள் இல்லாமல் தரப்பட்டுள்ளன. நீள் வட்டத் துணை அதிகாரத்தில் பயன்படுத்திய முறைகளைக் கையாண்டு இவைகளையும் நிறுவுவது எளிதாகும்.

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - = 0$$

என்பது அ. வளைவின் நியம வடிவத்தில் சமன்பாடு

(i) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு

$$S_1 \equiv \frac{x\,x_1}{u^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} - 1 = 0$$

(ii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் இசைக் கோடு, மற்றும் தொடு நாண்

$$S_1 \equiv \frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{v\,v_1}{b^2} - 1 = 0$$

(iii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட இரு தொடு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $S_1{}^2 = SS_{11}$ அதாவது,

$$\left(\frac{x\,x_1}{u^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right)$$

(iv) $M(x_1, y_1)$ என்பதை நடுப்புள்ளியாக உடைய நாணின் சமன்பாடு $S_1 = S_1$,

அதாவது,

$$\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = \frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2}$$

(v) $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $S = 0$-வுக்குத் தொடு கோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை $a^2 l^2 - b^2 m^2 = n^2$.

மேலும் $y = mx + c$ என்பது தொடுகோடு ஆனால்

$$c^2 = a^2 m^2 - b^2.$$

ஆகவே $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ என்பவை இரண்டு கிளைகளுக்கு வரையப்படும் இரண்டு இணை தொடுகோடுகளாகும்.

(vi) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$$

(vii) $y = mx$, $y = m^1 x$ என்பவை இரண்டு துணை விட்டங்கள் என்றால் $m m^1 = + \frac{b^2}{a^2}$.

(viii) அ. வளையின் துணை வட்டம் (auxiliary cricle) $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

(ix) குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ஆகும்.

§98. துணையலகுக் கூறுகள் (Parametric co-ordinates)

$(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்ற புள்ளி எப்போதும் (அதாவது θ-வுக்கு எந்த மதிப்பு ஆனாலும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பதைச் சமனடையச் செய்யும். ஆகவே $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்பவற்றைத் துணையலகுக் கூறுகள் என்கிறோம், இங்கே θ என்பது துணையலகு.

$$x = a \sec\theta, \quad y = b \tan\theta$$

என்பவற்றைத் துணையலகுச் சமன்பாடு என்பர்.

$(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்பதைச் சுருக்கமாக 'θ' என்று எழுதுவது வழக்கம்.

§99. 'θ' என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a} \sec\theta - \frac{y}{b} \tan\theta = 1$$

§ 100. 'θ' என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$$

§ 101. தொலைத் தொடுகோடுகள் (Asymptotes)

ஒரு தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி முடிவிலிப் புள்ளியாக (point at infinity) இருந்தால் அந்தத் தொடுகோட்டிற்குத் தொலைத் தொடுகோடு (asymptote) என்று பெயர்.

§ 101·1. அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற அ. வளைவின் ஒரு தொடுகோடு

$$y = mx + c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்போம்.

(1), (2) இவைகளின் தீர்வு காணில்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

அதாவது,

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{2mc}{b^2}x - \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0 \ \ldots \ (3)$$

(3)-ன் மூலங்கள், அ. வளைவு (1)-ஐ, கோடு (2) வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ஆ. தொ. ஆகும்.

ஆனால் $y = mx + c$ என்பது (1)-ன் தொலைத் தொடுகோடு என்றால், அந்த வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ஆ. தொ. சமமாகி அவைகள் முடிவிலிகளாக வேண்டும். இதற்கான நிபந்தனை x^2 —, x — ஆகியவற்றின் குணகங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாகவேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

$$\frac{2mc}{b^2} = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

(5)-லிருந்து $m=0$ அல்லது $c=0$ ஆனால் $m=0$ என்றால் (4)-லிருந்து $\frac{1}{a^2}=0$. இது இவ்வாறு இருக்கமுடியாது. எனவே, $m\neq 0$.

$$\therefore \quad c=0$$

$$\text{மேலும்,} \quad m=\pm\frac{b}{a}$$

எனவே அ. வளைவிற்கு இரண்டு தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டென்று புலனாகிறது.

அவைகளின் சமன்பாடுகள்

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{மற்றும்} \quad y=-\frac{b}{a}x$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

இவைகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

[படம் 65-ஐப் பார்க்கவும்]

குறிப்: (1) தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆதிவழியாகச் செல்கின்றன. எனவே அதிபரவளையின் மையத்திலிருந்து அந்த அ. வளைவுக்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகள் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆகும். இதையே தொலைத் தொடுகோட்டின் வரைவிலக்கணமாகவும் கொள்ளலாம்.

(2) நீள் வட்டத்திற்கு உண்மையான தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது.

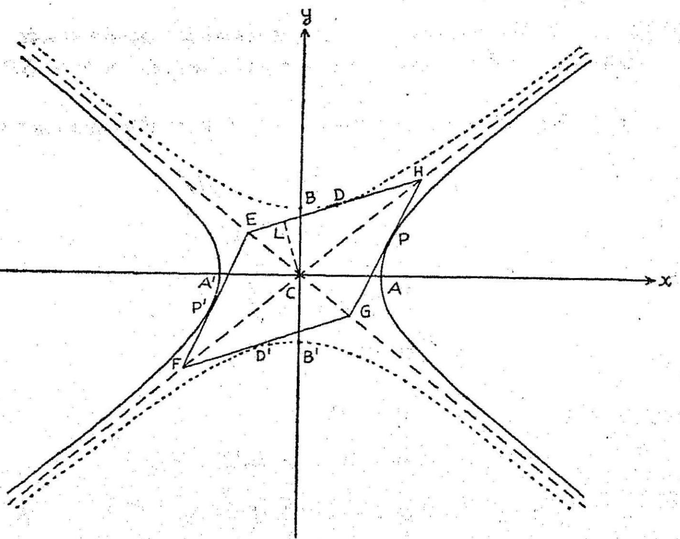
(3) பரவளையின் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றோடு ஒன்று பொருந்தி அதுவும் முடிவிலி தளத்தில் உள்ளது (plane at infinity).

(4) அ. வளையின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து, x, y அச்சுகள் தொலைத் தொடுகோடுகள் அடங்கிய கோணத்தை இரு சம கூறாக்குகின்றன என்று அறிகிறோம்.

(5) $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $y = \pm x$ அல்லது $x^2 - y^2 = 0$ ஆகும்.

(6) அ. வளைவின் சமன்பாட்டுக்கும் அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாட்டுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் மாறிலி உறுப்புகளில் மட்டும்தான் உண்டு (only in the constant term) என்பதைக் கவனிக்கவும்.

§ 102. துணை அதிபரவளைவு (Conjugato Hyperbola)



படம் 67.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற அ. வளைவின் குறுக்கச்சு (transverse axis) $AA' = 2a$ ஆகும். இது x-அச்சுடன் பொருந்துகிறது. இதன் துணை அச்சு $BB' = 2b$ ஆகும். இது y-அச்சுடன் பொருந்துகிறது.

இனி, $BB' = 2b$ என்பதைக் குறுக்கச்சாகவும், $AA' = 2a$ என்பதை துணையச்சாகவும் உடைய அதிபரவளைவிற்குத் துணை அதிபரவளைவு என்று பெயர். இந்தத் துணை அதிபரவளைவில் குறுக்கச்சு y-அச்சுடனும், துணையச்சு x-அச்சுடனும் பொருந்துவதால் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

அல்லது $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ ... (2)

குறிப்பு : அ. வளைவு மற்றும் அதன் துணை அ. வளைவிற்கும் ஒரே மையம், என்றும் அதே தொலைத் தொடுகோடுகள் தாம் உண்டென்றும் நாம் அறியவேண்டும்.

§ 103. அதிபரவளைவின் சிறப்புப் பண்புகள் (Special propertes of hyperbola)

§ 103·1. S, S' **என்பவை அ. வளைவின் குவியங்கள் P அ. வளைவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி என்றால் $S'P \sim SP = 2a$**

அ. வளைவின் வரைவிலக்கணப்படி [படம் 65-ஐப் பார்க்கவும்]

$$SP = e \cdot PM = e \cdot NZ$$
$$= e\,(CN - CZ)$$
$$= \left(x - \frac{a}{e}\right)$$
$$= ex - a$$

மேலும் $S'P = e \cdot PM' = e \cdot NZ'$

$$= e\,(CN + CZ')$$
$$= \left(x - \frac{a}{e}\right)$$
$$= ex + a$$

$$\therefore \quad SP - SP = (ex + a) - (ex - a) = 2a$$

§103·2 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **என்ற அதிபரவளைவின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள் PR, PS என்றால் $PR, PS =$ ஒரு மாருத எண் ஆகும்.** (B. E. '71)

P-ன் ஆ. தொ. $(a \sec\theta,\ b \tan\theta)$ என்றால் P-யிலிருந்து $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோட்டின் தூரம்

$$PR = \frac{\dfrac{a \sec\theta}{a} + \dfrac{b \tan\theta}{b}}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}$$

$$= \frac{ab(\sec\theta + \tan\theta)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

இதேபோல் $PS = \dfrac{ab(\sec\theta - \tan\theta)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\therefore \quad PR \cdot PS = \frac{a^2 b^2 (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \text{மாறிலி.}$$

§ 103·3. ஓர் அதிபரவளைவின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு தொலைத் தொடுகோடுகளை L, M என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

(அ) LM-ன் நடுப்புள்ளி P ஆகும்.

(ஆ) $CL \cdot CM = a^2 + b^2$ (c மையம்) (B. Tech. '70)

$P(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) இவைகளின் தீர்வு காணில்

$$\frac{x}{a}(\sec\theta + \tan\theta) = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{\sec\theta + \tan\theta} = a(\sec\theta - \tan\theta)$$

மேலும் $y = -b(\sec\theta - \tan\theta)$

எனவே L-ன் ஆ. தொ. $[a(\sec\theta - \tan\theta), b(\sec\theta + \tan\theta)]$

$\therefore$ LM-ன் நடுப் புள்ளியின் ஆ. தொ.

$\left[\frac{a}{2}(2\sec\theta), \ \frac{b}{2}(2\tan\theta)\right]$, அதாவது $[a\sec\theta, b\tan\theta]$

இவைகள் P-யின் ஆயத் தொலைகளே.

எனவே LM-ன் நடுப்புள்ளி P ஆகும்.

மேலும் C என்பது ஆதி $(0, 0)$ ஆதலால்

$$CL^2 \cdot CM^2 = [a^2(\sec\theta - \tan\theta)^2 + b^2(\sec\theta - \tan\theta)^2] \times [a^2(\sec\theta + \tan\theta)^2 + b^4(\sec\theta + \tan\theta)^2]$$

$$= [a^4(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2 + b^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2 + a^2b^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2 + a^2b^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2]$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2$$

$$\therefore \quad CL \cdot CM = a^2 + b^2$$

§ 103·4. ஒரு அதிபரவளைவின் இரு தொலைத் தொடுகோடுகளும் ஏதேனும் ஒரு தொடுகோடும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு மாறாதது.

$P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு தொலைத் தொடுகோடுகளை L, M என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். § 10·3-ல் விளக்கியபடி

L-ன் ஆ. தொ. $[a(\sec\theta - \tan\theta), -b(\sec\theta - \tan\theta)]$

M-ன் ஆ. தொ. $[a(\sec\theta + \tan\theta), b(\sec\theta + \tan\theta)]$

அதிபரவளைவின் மையம் $c(0, 0)$

$\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளும் தொடுகோடும் உண்டாக்கும் முக்கோணம் $\triangle CLM$-ன் பரப்பு,

$$= \frac{1}{2}[a(\sec\theta - \tan\theta) \cdot b(\sec\theta + \tan\theta) - \{-b(\sec\theta - \tan\theta) \cdot a(\sec\theta + \tan\theta)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[ab(\sec^2\theta - \tan^2\theta) + ab(\sec^2\theta - \tan^2\theta)]$$

$= ab =$ மாறிலி.

§ 103·5. இரண்டு தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் 2 $\sec^{-1}(e)$ [e என்பது மையவகற்சி]

(B. Tech. '63)

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{-b}{a}$ ஆகும்.

∴ அவைகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் 2φ என்றால் $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ [படம் 65-ஐப் பார்க்கவும்.]

$$\text{ஆனால்}\quad \sec^2\varphi = 1 + \tan^2\varphi = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$= e^2$$

$$\therefore \quad \sec\varphi = e$$

$$\text{அதாவது}\quad \varphi = \sec^{-1}(e)$$

$$\therefore \quad 2\varphi = 2\sec^{-1}(e)$$

§ 103·6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **என்ற அதிபரவளைவின் மையவகற்சி** e, **துணை அதிபரவளைவின் மையவகற்சி** e_1 **என்றால்** $\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e_1^2} = 1$

கொடுத்த அதிபரவளைவின் துணை அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

எனவே மேற்படி துணை அதிபரவளைவின் மைய வகற்சி

$$e_1 = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{e_1^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

ஆனால் கொடுத்த அதிபரவளைவின் மைய வகற்சி

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{e^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1)ஐயும் (2)ஐயும் கூட்டினால்

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1{}^2} = 1$$

§ 103·7. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் துணை அதிபரவளைவு $S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ CP, CD என்ற இரு துணை அரை விட்டங்கள் $S = 0$-வை P-யிலும், $S' = 0$ வை D யிலும் வெட்டினால் $CP^2 - CD^2 = a^2 - b^2$ (c என்பது மையம்).

P-ன் ஆ. தொ. ($a \sec \theta$, $b \tan \theta$) என்றால் CP-ன் சரிவு

$$m = \frac{b \tan \theta - 0}{a \sec \theta - 0} = \frac{b}{a} \sin \theta$$

CD-ன் சரிவு

$$m' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{b}{a \sin \theta}$$

$\therefore$ CD-ன் சமன்பாடு $y = \frac{b\,x}{a \sin \theta}$

இது $S' = 0$-வை D-ல் வெட்டுகிறது. ஆகையால் இதை $S' = 0$-வுடன் தீர்வு காணில்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2 x^2}{b^2 a^2 \sin^2 \theta} = -1$$

அதாவது $\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) = -1$

அதாவது $\frac{x^2}{a^2}(-\cot^2 \theta) = -1$

$$\therefore \quad x = a \tan \theta$$

$$\therefore \quad y = \frac{b}{a \sin \theta} \cdot a \tan \theta = b \sec \theta$$

எனவே D-யின் ஆ. தொ. ($a \tan \theta$ $b \sec \theta$)

$$\therefore \quad CP^2 - CD^2 = (a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta) - (a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta)$$
$$= (a^2 - b^2)\sec^2\theta - (a^2 - b^2)\tan^2\theta$$
$$= (a^2 - b^2)(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$$
$$= a^2 - b^2$$

§ 103·8. PCP', DCD' என்ற துணை விட்டங்கள்

$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-வை P, P' என்ற புள்ளிகளிலும், துணை அதிபரவளைவு $S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$-வை D, D' என்ற புள்ளிகளும் வெட்டுகின்றன. இந்த நான்கு புள்ளிகளில் தொடும் தொடுகோடுகள் மாறாத பரப்புடைய ஒரு இணைகரத்தை உண்டாக்குகின்றன.

PP' என்ற புள்ளிகளும், D, D' என்ற புள்ளிகளும் ஆதியாகிய C-க்குச் சமச்சீராக உள்ளன.

எனவே P, P'-களில் சரிவுகள் சமம்.

இதேபோல் D, D'-களில் சரிவுகள் சமம்.

ஆகையால் P, P', D, D' என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடு கோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை ($EFGH$) உண்டாக்கும்.

[படம் 67-ஐப் பார்க்கவும்]

இணைகரம் $EFGH = 4 \times$ இணைகரம் $CPHD$

$\therefore$ இணைகாரம் $EFGH$-ன் பரப்பு

$$= 4 \times CP \times CL \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இங்கே CL என்பது D-யில் தொடும் தொடு கோட்டிற்கு C-யிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரம்.

$S = 0$-வின் மேல் உள்ள P-யின் ஆ. தொ. $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ என்றால் $S' = 0$-வின் மேல் உள்ள D-யின் ஆ. தொ. $(a\tan\theta, b\sec\theta)$ [§ 103·7].

$\therefore \quad S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ என்ற துணை அதிபரவளைவை D-யில் தொடும் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\tan\theta - \frac{y}{b}\sec\theta + 1 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$c\,(0,\,0)$-விலிருந்து (2)-க்கு உள்ள செங்குத் தூரம்,

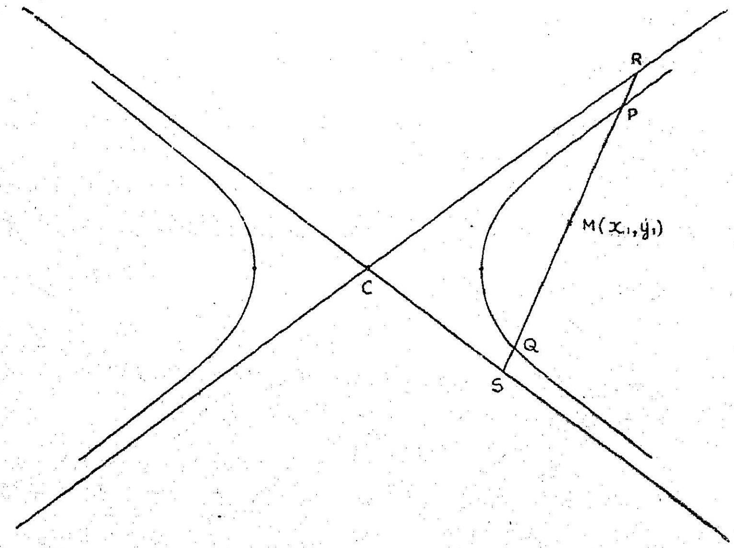
$$CL = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\tan^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sec^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan\theta}}$$

மேலும், $CP = \sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta}$

CP, CL இவைகளின் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால் இணைகரம் $EFGH$-ன் பரப்பு $= 4 \times ab$

$=$ மாறிலி

§ 103·9. $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **என்ற அதிபர வளைவின் PQ என்ற நாண் தொலைத் தொடுகோடுகளை R, S என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் $PR = QS$.**



படம் 68.

$M\,(x_1,\, y_1)$ என்பது PQ என்ற நாணின் நடுப்புள்ளி என்போம். $PR = QS$ என்று நிறுவுவதற்குப் பதிலாக RS-ன் நடுப் புள்ளியும் M தான் என்று காண்பித்தல் போதுமானது.

PQ-வின் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$

அதாவது $\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = \dfrac{x_1{}^2}{a^2} - \dfrac{y_1{}^2}{b^2}$ ... (1)

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$$

(1), (2) இவைகளின் தீர்வு காணில்

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{xy_1}{ab} = \left(\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{x}{a}\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right) = \frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2}$$

$$\therefore \quad x = a\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

$$\therefore \quad y = b\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

எனவே R-ன் ஆ. தொ. $\left[a\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right), b\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right]$

இதேபோல் S-ன் ஆ. தொ.

$$\left[a\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right), -b\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)\right]$$

எனவே RS-ன் நடுப்புள்ளி $M'(x_2, y_2)$ என்றால்

$$x_2 = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) + \left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)\right] = x_1$$

$$y_2 = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) - \left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)\right] = y_1$$

$\therefore \quad M'(x_2, y_2) \equiv M(x_1, y_1)$

எனவே $PR = QS$.

குறிப்பு : மேலே விளக்கியுள்ள சிறப்புப் பண்புகளைப் பொதுவாக எந்த அதிபரவளைவுக்கும் பொருந்துமாறு நிறுவியுள்ளோம். எனவே இவைகள் செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு பொருந்தும் என்று நாம் தனியாகக் கூறவேண்டிய அவசியமில்லை.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$(2, 0)$ என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும் $x - y = 0$ என்ற கோடு அதற்கேற்ற இயக்குவரையாகவும் மையவகற்சி 2-ம் உள்ள ஒரு அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x_1, y_1)$ என்பது அதிபரவளைவின் மேல் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி என்போம்.

P-யிலிருந்து $x - y = 0$-வுக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$PM = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$$

$S(2, 0)$-விலிருந்து P-ன் தூரம்

$$SP = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

வரைவிலக்கணப்படி $SP^2 = e^2 \cdot PM^2$.

$$\therefore \quad (x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 2^2 \cdot \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

அதாவது,

$$x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2 = 2(x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2)$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை அதாவது அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 4xy + 4x - 4 = 0$.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

கீழ்க்காணும் அதிபரவளைவின் மையம், குவியங்கள், மையவகற்சி காண்க.

$$3x^2 - y^2 - 36x + 4y + 101 = 0$$

கொடுத்த சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதினுல்

$$3(x^2 - 12x) - (y^2 - 4y) = -101$$

$$3(x^2 - 12x + 36) - (y^2 - 4y + 4) = 108 - 4 - 101$$

$$3(x - 6)^2 - (y - 2)^2 = 3$$

அதாவது,

$$\frac{(x-6)^2}{1^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆதியை (6, 2)-க்கு மாற்றுக. (X, Y) என்பவை நடப்பு ஆ. தொ. என்றால்

$$x = 6 + X; \quad y = 2 + Y$$

சமன்பாடு (1) பின்வரும் வடிவம் பெறும்.

$$\frac{X^2}{1^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

இங்கே $a = 1,\ b = \sqrt{3}$

$$\therefore \quad \text{மையவகற்சி } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{1+3}}{1} = 2$$

(2)-ன் மையம் $X = 0,\ Y = 0$

$\therefore$ (1)-ன் மையம் $x = 6,\ y = 2$

(2)-ன் குவியங்கள் $X = \pm ae,\ Y = 0$

அதாவது $X = \pm 2,\ Y = 0$

$\therefore$ (1)-ன் குவியங்கள் $x = 6 \pm 2,\ y = 0$

அதாவது $x = 8,\ y = 2$

$x = 4,\ y = 2$

எனவே கொடுத்த அதிபரவளைவின் மையம் (6, 2), குவியங்கள் (8, 2) மற்றும் (4, 2), மையவகற்சி 2

மாதிரிக் கணக்கு 3.

$S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் நாண்கள் மையத்தில் செங்கோணங்களில் எதிர்கொள்கின்றன வென்றால் அந்த நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

என நிறுவுக.

$M(x_1, y_1)$ நடுப்புள்ளியாக உடைய நாண் AB-ன் சமன்பாடு $S_1 = S_{11}$

அதாவது $$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \quad \ldots \quad (1)$$

மையம் C என்பது ஆதியாகும். எனவே CA, CB என்ற கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு காண, $S = 0$-வை (1)-ன் உதவியுடன் சமபடித்தான தாக்கவேண்டும்.

அப்படிச் செய்தபின்பு CA, CB-களின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} = 0$$

அதாவது $$\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy^2}{b^2}\right)^2 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$CA \perp CB$ என்றால் சமன்பாடு (2)-ல் x^2 குணகம் $+ \; y^2$-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $$\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) - \frac{x_1^2}{a^4}\right\} + \left\{\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) - \frac{y_1^2}{a^4}\right\} = 0$$

அதாவது $$\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}$$

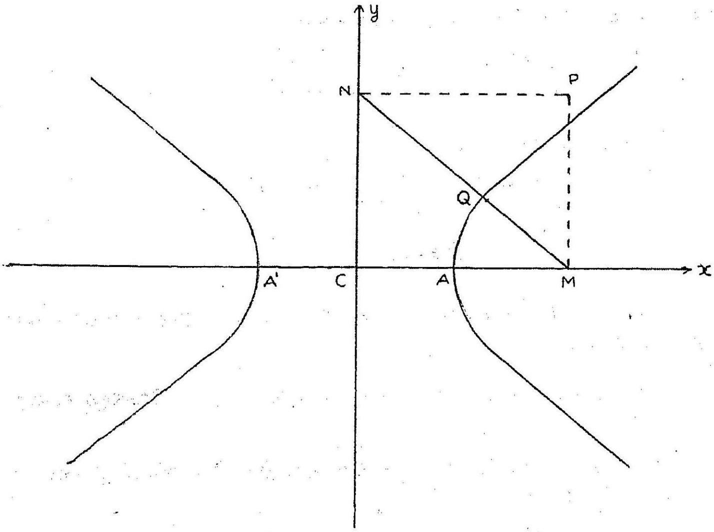
$\therefore$ $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

$S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் வரைச் செங்கோடு $x-$, $y-$ அச்சுகளை M, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. MP, NP என்பவை அச்சுகளுக்குச் செங்குத்தாக P-யில்

வெட்டுகின்றன. P-யின் நியமப்பாதை $a^2x^2 - b^2y^2 = (a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக. (B. E. '72)



படம் 69.

$Q\,(a \sec\theta,\ b\tan\theta)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு MQN-ன் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$$

இதை x அச்சுடன் $(y = 0)$ தீர்வு காணில்

$$x = \frac{a^2+b^2}{a}\sec\theta$$

அதாவது M-ன் ஆ. தொ. $\left(\frac{a^2+b^2}{a}\sec\theta,\ 0\right)$

இதேபோல் N-ன் ஆ. தொ. $\left(0,\ \frac{a^2+b^2}{b}\tan\theta\right)$

MP என்பது x அச்சுக்கும், NP என்பது y அச்சுக்கும் $\perp$ ஆக இருப்பதால் $P(x_1, y_1)$ என்றால்,

$$x_1 = \frac{a^2+b^2}{a}\sec\theta,\ y_1 = \frac{a^2+b^2}{b}\tan\theta$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{a\, x_1}{a^2 + b^2}; \quad \tan\theta = \frac{b\, y_1}{a^2 + b^2}$$

Q-வை விலக்க வர்க்கமெடுத்து கழிக்கவும்.

$$1 = \frac{a^2\, x^2}{(a^2 + b^2)} - \frac{b^2\, y_1{}^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$\therefore$ P-ன் நியமப் பாதை

$$a^2\, x^2 - b^2\, y^2 = (a^2 + b^2)^2$$

பயிற்சி 8.

1. கீழ் வருவனவற்றைப் பயன்படுத்தி அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

(a) குவியம் $(1, 2)$, மைய வகற்சி $\sqrt{3}$, இயக்கு வரை $2x + y = 1$.

(b) குவியம் $(4, -1)$, மைய வகற்சி 3, இயக்கு வரை $2x - y + 5 = 0$.

(c) மையம் $(6, 2)$, ஒரு குவியம் $(4, 2)$, மைய வகற்சி 2.

2. பின்வரும் அதிபரவளைவுகளின் மையம், குவியங்கள், மையவகற்சி காண்க.

(a) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$

(b) $9x^2 - 25y^2 - 12x - 20y - 225 = 0$

(c) $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$

3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின்மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-யின் நிலைத் தூரம் (ordinate) தொலைத் தொடுகோடுகளை Q, Q_1 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $QP \cdot Q_1P = b^2$ என்று நிறுவுக. (B. Tech. '66.)

4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் செங்குத்தாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. P-யின் நியமப்பாதை எது? (B. E. '62)

$a = b$ என்றால் மேற்படி நியமப்பாதை யாது?

5. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின்மேல் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ என நிறுவுக.

6. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ என்பவை இரண்டு துணை அதிபரவளைவுகள். $S = 0$-வின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின், $S' = 0$-வைக் குறித்து இசைக்கோடு, $S = 0$-வைத் தொடும் என்று நிறுவுக.

7. (α, β) என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் சரிவு $\tan\theta$, $\cot\theta$ என்றால் $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2$ என்று நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவைக் குறித்து P என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ என்ற குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தைத் தொடுகிறது என்றால் P-யின் நியமப்பாதை $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 - b^2}$ என்று நிறுவுக.

9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் நாண், மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தில் எதிர்கொள்கிறது. அந்த நாணின் இசைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை காண்க

10. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவின் வரைச் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $(y^2 - x^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ என்று காண்பிக்கவும்.

11. $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ என்ற வட்டத்தின்மேல் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவிற்கு வரையப்பட்ட தொடு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$ என்று நிறுவுக.

12. $x^2 - y^2 = k^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவைக், M-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் நாண் தொட்டால், M-ன் நியமப்பாதை என்ன ?

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின்மேல் உள்ள Q என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு $x-$, $y-$ அச்சுகளை A, B என்ற கோடுகள் மேற்படி அச்சுகளுக்கு $\perp$ ஆக வரையப்பட்டு P-யில் வெட்டுகின்றன. P-ன் நியமப்பாதை $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ என நிறுவுக.

(14) $ln + my + n = 0$ என்ற கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவுக்கு வரைச் செங்கோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை $\frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2} = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2}$ என நிறுவுக.

15. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் வரைச் செங்கோடும் மையத்திலிருந்து அதற்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடும் சந்திக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

என்று நிறுவுக.

16. ஒரு அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடு ஒன்றின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடு அந்தத் தொலைத் தொடு கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும் என்று காண்பிக்கவும்.

17. CP என்பது $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் அரை விட்டம். அதன் துணை அரை விட்டமாகிய CD, துணை அதிபரவளைவை D-யில் வெட்டுகிறது.

(அ) $\triangle$ CPD-யின் பரப்பு ஒரு மாறிலி

(ஆ) PD என்ற கோடு தொலைத் தொடுகோடு ஒன்றுக்கு இணையாக இருக்கும் என்று காண்பிக்கவும்.

18. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடும் வரைச் செங்கோடும் y-அச்சை முறையே Q, R என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. QR-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதிபரவளைவின் குவியங்கள் வழியாகச் செல்லும் என நிறுவுக. (B. Tceh '72)

விடைகள்

(a) $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14y - 22 = 0$

(b) $31x^2 - 36xy + 4y^2 + 130x - 100y + 14 = 0$

(c) $(x-6)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

2. (a) $(-1, 2), (-1 \pm \sqrt{13}, 2), \frac{\sqrt{13}}{2}$

(b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{3} \pm \sqrt{34}, -\frac{2}{5}\right), \frac{\sqrt{34}}{5}$

(c) $(-1, 3), \left(\pm\sqrt{\frac{119}{2}} - 1, 3\right), \frac{\sqrt{7}}{1}$

4. $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$; $x^2 + y^2 = 0$ என்னும் புள்ளி (வட்டம்) (point circle)

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ 12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{k}$

§104. செவ்வக அதிபரவளைவு (Rectangular Hyperbola)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டில் $a = b$ என்றால்,

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற குறிப்பிட்ட அதிபரவளைவு கிடைக்கும்.

அ. வளைவு (1)-ல் தொலைத் தொடுகோடுகள் $y = \pm x$. எனவே அவைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஒரு செங்கோணம் ஆகும். இது பற்றியே, தொலைத் தொடுகோடுகள் செக்குத்தாக உள்ள அதிபரவளைவிற்குச் செவ்வக அதிபரவளைவு என்று பெயர்.

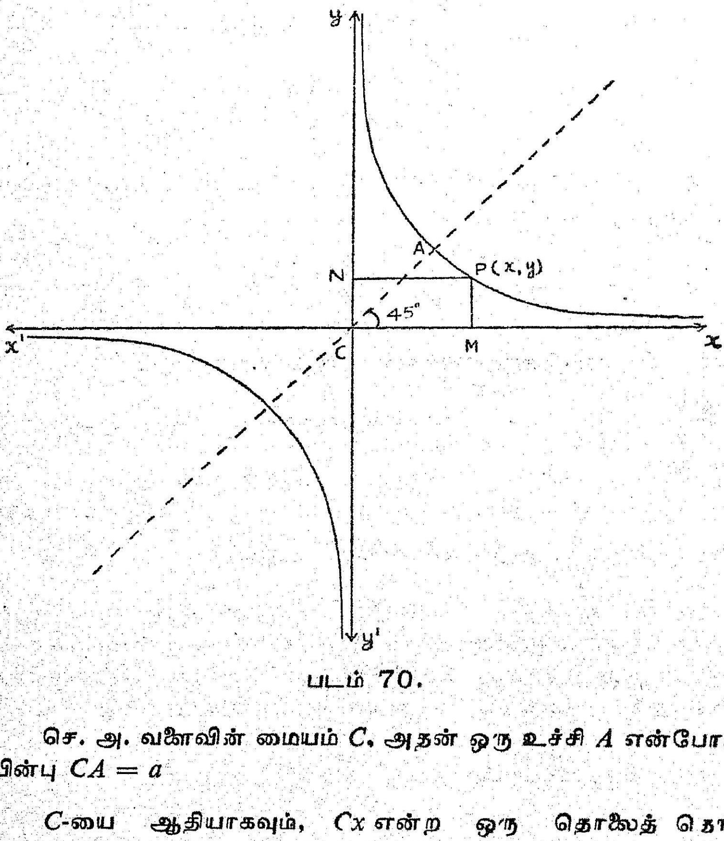
மேலும் மைய வகற்சி $e = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$

சமன்பாடு (1) குறிக்கும் செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் x அச்சிலிருந்து $+45^\circ$, -45° கோணங்களில் உள்ளன. இந்தத் தொலைத் தொடுகோடுகளையே x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு (1) ஐ

விட இன்னும் எளிய வடிவத்தில் கிடைக்கும். அதுமட்டுமல்லாமல் சில பண்புகளை அதிக சிரமம் இல்லாமல் அடைந்திட ஏதுவாகும்.

எழுதுவதற்கு எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு இனி 'செவ்வக அதிபர வளைவு' என்பதைச் சுருக்கமாக 'செ. அ. வளைவு' என்று குறிப்பிடுவோம்.

§105. தொலைத் தொடுகோடுகளை x—, y— அச்சுகளாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு



படம் 70.

செ. அ. வளைவின் மையம் C, அதன் ஒரு உச்சி A என்போம். பின்பு $CA = a$

C-யை ஆதியாகவும், Cx என்ற ஒரு தொலைத் தொடு கோட்டை x அச்சாகவும், இதற்குச் செங்குத்தாக உள்ள Cy என்னும் மற்றொருத் தொலைத் தொடுகோட்டை y- அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதனால் $x\,C\,A = 45°$

எனவே A-யின் ஆ. தொ. $(a \cos 45°;\ a \sin 45°)$

அதாவது, $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$P(x, y)$ என்பது அதாவது செ. அ. வளையின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்போம். P-யிலிருந்து x—, y— அச்சுகளுக்கு (அதாவது தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு) ⊥ ஆக PM, PN வரைக.

பின்பு $PN = x$, $MP = y$.

ஆனால் அதிபர வளையின் சிறப்புப் பண்பின்படி

(§ 103·2) $PM \cdot PN =$ மாறிலி.

அதாவது, $xy = k$ ... ... (1)

$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ என்ற புள்ளி (1) ஐச் சமனடையச் செய்ய வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = k \quad \therefore \quad k = \frac{a^2}{2}$$

எனவே செ. அ. வளையின் சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$ ஆனால், $\frac{a^2}{2} = c^2$ என்று பொதுவாக எழுதுவது வழக்கம்.

∴ செ. அ. வளையின் சமன்பாடு $xy = c^2$.

§ 160. $S \equiv 2xy - 2c^2 = 0$ என்றால்

1. $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு
$S_1 = 0$ அதாவது $xy_1 + x_1y - 2c^2 = 0$

2. $(x_1\ y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாக உடைய நாண்
$S_1 = S_{11}$ அதாவது $xy_1 + x_1y = 2x_1y_1$

3. (x_1, y_1)-லிருந்து வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $S_1^2 = S_{11}$

அதாவது $(xy_1 + x_1y - 2c^2)^2 = (2xy - 2c^2)(2x_1y_1 - 2c^2)$

இவைகளை நிறுவுவதற்கு முன்பு கையாண்ட முறைகளைப் பயன்படுத்துக.

§ 107. துணையலகுக் கூறுகள் (Parametric co-ordinates)

t-க்கு எந்த மதிப்பு ஆனாலும் $(ct) \times \left(\frac{c}{t}\right) = c^2$ என்பது சமனடைகிறது.

$\therefore$ $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்பது $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின் துணையலகுக் கூறுகளாகும்.

$x = ct, \ y = \frac{c}{t}$ என்பது அதன் துணையலகுச் சமன்பாடாகும்.

$\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்பதற்குப் பதிலாக சுருக்கமாக 't' என்று இனி குறிக்கப்படும்.

§ 108. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ள $P(t_1)$, $Q(t_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண்.

$P\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $Q\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y - c/t_1}{x - c/t_1} = \frac{c/t_1 - c/t_2}{ct_1 - c/t_2} = \frac{(t_2 - t_1)/t_1 t_2}{t_1 - t_2}$$

அதாவது $\dfrac{y - c/t_1}{x - ct_1} = -\dfrac{1}{t_1 \, t_2}$ (PQ-வின் சரிவு)

$\therefore \quad y\, t_1 t_2 - ct_2 = -x + ct_1$

அதாவது $x + y\, t_1 t_2 = c\,(t_1 + t_2)$

§ 109. $P(t)$ என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடு

$$x = ct, \quad y = c/t$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{-c/t^2}{c} = -\dfrac{1}{t^2}$ = தொடுகோட்டின் சரிவு

∴ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - c/t = -\frac{1}{t^2}(x - ct)$$

அதாவது $x + yt^2 = 2ct$

குறிப்பு : § 108-ல் உள்ள நாணின் சமன்பாட்டில் $t_1 = t_2 = t$ என்று பிரதியிட்டாலும் மேற்கண்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

§ 110. $P(t)$ **என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு**

தொடுகோட்டின் சரிவு $= -\frac{1}{t^2}$

∴ வரைச் செங்கோட்டின் சரிவு $= +t^2$

எனவே வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - c/t = t^2(x - ct)$$

அதாவது $xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$

§ 111. செவ்வக அதிபரவளைவின் சிறப்புப் பண்புகள்

§ 111·1. $P(t_1)$, $Q(t_2)$, $R(t_3)$ **என்ற மூன்று புள்ளிகள் $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ளன. அவைகளால் உண்டாகும் முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையமும் அந்த செ. அ. வளைவின் மேல் அமையும்.**

QR-ன் சரிவு $= -\frac{1}{t_2 t_3}$

∴ QR-ன் செங்குத்துக்கோட்டின் சரிவு $= t_2 t_3$

எனவே $P(ct_1, c/t_1)$ வழியாக சென்று QR-க்கு ⊥ ஆக உள்ள குத்துயரத்தின் (altitude) சமன்பாடு

$$y - c/t_1 = t_2 t_3 (x - ct_1)$$

அதாவது $yt_1 - c = t_1 t_2 t_3 (x - ct_1)$ ... (1)

இதேபோல் $Q(ct_2, c/t_2)$ வழியாகச் சென்று PR-க்கு ⊥ ஆக உள்ள குத்துயரத்தின் சமன்பாடு

$$yt_2 - c = t_1 t_2 t_3 (x - ct_2) \quad \text{... ...} \quad (2)$$

(1), (2) இவைகளின் தீர்வு காணில்,

$$y(t_1 - t_2) = ct_1 t_2 t_3 (t_2 - t_1)$$

$t_1 \neq t_2$ என்பதால் $y = -ct_1 t_2 t_3$

$$\therefore \quad x = -\frac{c}{t_1 t_2 t_3}$$

$$\therefore \text{ செங்குத்து மையம் } 0\left[-\frac{c}{t_1 t_2 t_3},\ -c\, t_1 t_2 t_3\right]$$

அதாவது $0\ [CT,\ C/T]$

இங்கே $T = -\dfrac{1}{t_1 t_2 t_3}$

$0\ (CT,\ C/T)$ என்ற புள்ளி $xy = c^2$ என்பதைச் சமன்டையச் செய்கிறது.

எனவே PQR என்ற முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையமும் செ. அ. வளைவின் மேல் உள்ளது என்று தெளிவாகிறது.

§111·2 கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபர வளைவுக்கு நான்கு வரைச் செங்கோடுகள் வரைய இயலும். அவைகளின் நான்கு அடிகள் (feet of the nermals) P, Q, R, S என்றால் அவைகளில் ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளால் ஆன முககோணத்தின் செங்குத்து மையம் நான்காவது புள்ளி ஆகும்.

கொடுத்த புள்ளி (α, β) என்போம்.

$(ct, c/t)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு

$$xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

இது (α, β) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால்,

$$\alpha t - \frac{\beta}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

அதாவது, $ct^4 - \alpha t^3 + \beta t - c = 0$ ... ... (1)

இது நான்குபடிச் சமன்பாடு என்பதால் இதற்குப் பொதுவாக நான்கு மூலங்கள் உண்டு. எனவே (α, β) என்ற கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து நான்கு வரைச் செங்கோடுகள் வரையலாம்.

(1)-ன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 என்போம். பின்பு P, Q, R, S ஆகியவற்றின் ஆ. தொ. $(ct_r, c/t_r)$, $r = 1, 2, 3, 4$ ஆகும்.

$\triangle PQR$-ன் செங்குத்து மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்.

$$0\left[-\frac{c}{t_1 t_2 t_3},\ -ct_1 t_2 t_3\right] \quad (\S\, 111\cdot 1)$$

ஆனால் (1)-லிருந்து (சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் பயன் படுத்தினால்) $t_1, t_2, t_3\ t_4 = -1$.

அதாவது, $t_1, t_2, t_3 = -\dfrac{1}{t_4}$

இதைப் பயன்படுத்தினால் செங்குத்து மையம் O-வின் ஆ. தொ $\left(ct_4, \dfrac{c}{t_4}\right)$ ஆனால் இவைகள் S-ன் ஆ. தொ. ஆகும்.

எனவே $\triangle PQR$-ன் செங்குத்து மையம் S ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1.

$xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடும் வரைச் செங்கோடும் ஒரு தொலைத் தொடுகோட்டை மையத்திலிருந்து முறையே α, β தூரங்களிலும், மற்றொரு தொலைத் தொடுகோட்டை முறையே γ, δ தூரங்களிலும் வெட்டினால் $\alpha\beta + \gamma\delta = 0$ என்று நிறுவுக.

செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி $P(t)$ என்போம்.

P-யில் தொடும் தொடுகோடு

$$x + yt^2 = 2ct \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

P-யில் வரைச் செங்கோடு

$$xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ஐ $y = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோட்டுடன் தீர்வு காணில்,

$$x = 2ct \qquad \therefore \quad \alpha = 2ct$$

(2)-ஐ $y = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோட்டுடன் தீர்வு காணில்,

$$x = c\left(t - \frac{1}{t^3}\right) \qquad \therefore \quad \beta = ct\left(1 - \frac{1}{t^4}\right)$$

(1)-ஐ $x = 0$ என்ற தொலேத் தொடுகோட்டுடன் தீர்வு காணில்,

$$y = \frac{2c}{t} \qquad \therefore \quad \gamma = \frac{2c}{t}$$

(2)-ஐ $x = 0$ என்ற தொலேத் தொடுகோட்டுடன் தீர்வு காணில்,

$$y = -ct\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) = \delta$$

$$\therefore \quad \alpha\beta + \gamma\delta = 2c^2t^2\left(1 - \frac{1}{t^4}\right) - 2ct^2\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 0$$

மாதிரிக் கணக்கு 2.

$xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளேவின் நாண்களின் நீளங்கள் $2d$ என்றால் அவைகளின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $(xy - c^2)(x^2 + y^2) = d^2xy$ என்று நிறுவுக.

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ என்பவைகளே நாணின் முனைப்புள்ளிகளாகவும் $M(x_1, y_1)$ என்பதை அதன் நடுப்புள்ளியாகவும் கொள்வோம்:

பின்பு, $x_1 = \frac{c}{2}(t_1 + t_2)$ ... ... (1)

$$y_1 = \frac{c}{2}\left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எடுகோள்படி $PQ^2 = 4d^2$

அதாவது $c^2(t_1 - t_2)^2 + c^2\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)^2 = 4d^2$

அதாவது $c^2(t_1 - t_2)^2\left[1 + \frac{1}{(t_1 t_2)^2}\right] = 4d^2$

அதாவது $c^2[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2]$

$$\left[1 + \frac{1}{(t_1 t_2)^2}\right] = 4d^2 \quad \ldots (3)$$

இப்போது (1)-லிருந்து $t_1 + t_2 = \frac{2x_1}{c}$

(2)-லிருந்து $t_1 t_2 = \frac{x_1}{y_1}$

இவைகளை (3)-ல் பயன்படுத்தினால்

$$c^2\left[\frac{4x_1^2}{c^2}-\frac{4x}{y_1}\right]\left[1+\frac{y_1^2}{x_1^2}\right]=4d^2$$

அதாவது, $4x_1(x_1 y_1 - c^2)(x_1^2 + y_1^2) = 4d^2 x_1^2 y_1$

அதாவது, $(x_1 y_1 - c^2)(x_1^2 + y_1^2) = d^2 x_1 y_1$

எனவே $M(x_1, y_1)$-ன் நியமப்பாதை

$$(xy - c^2)(x^2 + y^2) = d^2 xy.$$

பயிற்சி 9.

1. $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளையின் தொடுகோடு ஆவதற்கான நிபந்தனை யாது ?

2. ஒரு செ. அ. வளையின் மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோடு தொலைத் தொடு கோட்டை Q, R என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. c என்பது மையம் என்றால் $\triangle CQR$-ன் பரப்பு மாறிலி என்றும், QR-ன் நடுப்புள்ளி P என்றும் காண்பிக்கவும்.

3. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளையின் மேல் உள்ள $P(ct, c/t)$ என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு செ. அ. வளையை மீண்டும் Q என்ற புள்ளியில் வெட்டினால் Q-ன் ஆ. தொ. யாவை? மேலும் c என்பது மையம் ஆனால் $\frac{PQ}{CP^3}$ என்பது ஒரு மாறிலி என்றும் நிறுவுக. (B. tech 64')

4. ஒரு செ. அ. வளையின் மேல் உள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளில் தொடும் தொடு கோடுகள் ஒரு தொலைத் தொடுகோட்டை L, M என்ற புள்ளிகளிலும் மற்றொரு தொலைத் தொடு கோட்டை L', M' என்ற புள்ளிகளிலும் வெட்டுகின்றன. PQ என்ற நாண் $LM, L'M'$ இவைகளின் நடுப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் என்று நிறுவுக. (B. Tech '72)

5. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளையின் வரைச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை

$$c^2(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = 0$$

என நிறுவுக. (B. E. '64, B. Tech '64)

6. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின் மையம் C என்போம். $N(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து செ. அ. வளைவுக்கு வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடுகளின் அடிகள் N_1, N_2, N_3, N_4 எனில் $CN_1^2 + CN_2^2 + CN_3^2 + CN_4^2 = CN^2$ என நிறுவுக.

7. ஒரு செ. அ. வளைவுக்கு (α, β) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடுகளின் அடிகள் P, Q, R, S என்போம். S வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனை S' ஆனது P, Q, R வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மேல் இருக்கும் என்று காண்பிக்கவும்.

8. ஒரு செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு செ. அ. வளைவை மீண்டும் Q-வில் சந்திக்கிறது. PQ-வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் செ. அ. வளைவை P'-ல் வெட்டட்டும். PP' என்பது அந்த செ. அ. வளைவின் விட்டம் என்று காண்பிக்கவும்.

9. ஒரு செ. அ. வளைவின் குறுக்கச்சு $2c$ அதன் தொலைத் தொடுகோடுகள் $x-$, $y-$ அச்சுகளாகும் $(2c, 3c)$-யை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு யாது? (B. E. '72)

10. ஒரு செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ள P, P' என்ற புள்ளிகளில் இருந்து ஒரு தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு ⊥ ஆக PM-ம், மற்றொரு தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு ⊥ ஆக $P'M'$-ம வரையப்படுகின்றன. PP' என்பது MM'-க்கு இணையாகும் என்று நிறுவுக. (B. Tech. '65)

11. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின் ஒரு நாண் AB-யின் நடுப்புள்ளி M; C மையம் ஆகும். CM-ன் நடுப்புள்ளி அதாவது செ அ. வளைவின் மேல் இருந்தால், AB என்ற கோடு $xy = 4c^2$ என்ற செ. அ. வளைவைத் தொடும் என நிறுவுக. (B. Tech. 67)

12. ஒரு வட்டம் $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்று காண்பிக்கவும். மேலும் அந்தப் புள்ளிகளின் கிடைத் தூரங்களின் (abscissae) பெருக்கல் பலன் ஒரு மாறிலி என்றும் நிறுவுக.

13. ஒரு செ. அ. வளைவின் மையம் C. ஆரம் r-உடைய ஒரு வட்டம் அதை P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது என்றால் $CP^2 + CQ^2 + CR^2 + CS^2 = 4r^2$ என நிறுவுக

14. $xy = c^2$ என்ற செ. அ. வளைவின்மேல் உள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு, தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆகியவற்றால் உண்டாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

$\frac{1}{2c^4}[x_1^2 - y_1^2]^2$ என்று நிறுவுக.

விடைகள்

1. $4c^2 lm = n^2$

3. $\left(-\frac{c}{t^3}, -ct^3\right)$

9. $3x + 2y = c$

கணிதக் குறியீடுகள்

	—	ஆகவே
	—	ஏனெனில்
$a = b$	—	a ஆனது b-க்குச் சமன்
$b \equiv b$	—	a ஆனது b-க்குச் சர்வசமன்.
$a \approx b$	—	a ஆனது b-க்குத் தோராயசமன்
$a > b$	—	a ஆனது b-க்குப் பெரியது
$a \ngtr b$	—	a ஆனது b-க்குப் பெரியதுதன்று
$a < b$	—	a ஆனது b-க்குச் சிறியது
$a \nless b$	—	a ஆனது b-க்குச் சிறியதன்று
$\left.\begin{matrix} a \geq b \\ a \geqslant b \end{matrix}\right\}$	—	a ஆனது b-க்குப் பெரியது அல்லது சமமானது
$\sqrt{a}$	—	a-ன் வர்க்கமூலம்
$n \sqrt{a}$	—	a-ன் n ஆவது வர்க்கமூலம்
$\log e^{a}$	—	e அடிக்கு a-ன் மடக்கை
$< ABC;\ \hat{ABC}$	—	கோணம் ABC
$AB \perp CD$	—	AB ஆனது CD-க்குச் செங்குத்து
$\triangle\ ABC \mathrel{\vert\vert\vert} \triangle\ DEF$	—	ABC என்னும் முக்கோணம் DFF என்னும் முக்கோணத்திற்கு வடிவொப்பாகும்
$AB \parallel CD$	—	AB ஆனது CD-க்குச் சமாந்தரம்
$\triangle$	—	முக்கோணம்
$\underset{x \to a}{Lt} f(x) = l$	--	x ஆனது a-ஐ அணுக, $f(x)$-ன் எல்லைமதிப்பு b-க்குச் சமமாகும்
$\dfrac{dy}{dx}$	—	x-ஐப் பொருத்து y-ன் வகைக்கெழு
$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$	—	a முதல் b வரையில் படும் $f(x)$-ன் தொகை

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

1. EDWARDS J., — Integral calculus for Beginners, (Macmillan and Co.)

2. GIBSON G. A. — Elementary Treatise on the Calculus, (Macmillan and Co.)

3. RAMSAY A. S., — Elementary Co-ordinate Geometry (Cambridge University Press)

4. VENKATARAMAN M. K. — Engineering Mathematics (National Publishing Co., Madras)

5. MORRIL W. K., — Calculus, (D. Van Nostrand Co.)

6. PISKUNOV N., — Differential and Integral Calculus, (Mir Publishers, Moscow)

7. BACON H. M. — Differential and Integral Calculus, (McGraw-Hill Book Company)

8. LONEY S. L. — Plane Trigonometry, Part-II, (Cambridge University Press)

9. FRANK AYRES Jr. — Trigonometry (Schaum Publishing Co., Newyork)

10. SMITH C., — Conic Sections, (Macmillan and Co.)

11. LONEY S. L., — The Elements of Co-ordinate Geometry, (Macmillan and Co.)

12. BARTON A., — An Introduction to Co-ordinate Geometry, (University of London Press)

கலைச்சொற்கள்

Algebra	—	இயற்கணிதம்
Algebraic expression	—	இயற்கணிதக் கோவை
Algebraic function	—	இயற்கணிதச் சார்பு
Algebraic operations	—	இயற்கணிதச் செயலிகள்
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட
Altitude	—	குத்துக்கோடு, குத்துயரம்
Amplitude	—	வீச்சம்
Angle	—	கோணம்
Angle acute	—	குறுங்கோணம்
Angle adjacent	—	அடுத்துள்ள கோணம்
Angle alternate	—	ஒன்றுவிட்ட கோணம்
Angle eccentric	—	துணைவட்டக் கோணம் மையவகற்சிக் கோணம்
Angle obtuse	—	விரிகோணம்
Angle right	—	செங்கோணம்
Angle vectorial	—	(வெக்டார் கோணம், ஆரைக் கோணம்)
Angle at the centre	—	மையக் கோணம்
Anticlockwise	—	இடஞ்சுழியாக
Approximate	—	தோராயம்
Arc	—	வில்
Argand diagram	—	ஆர்கன்ட் வரைப்படம்
Argument of a function	—	சார்பின் மாறி
Argument (of a complex number)	—	கோண வீச்சம்
Asymptote	—	தொலைத் தொடுகோடு
Auxiliary circle	—	துணைவட்டம்
Axes of coordinates	—	கிடைநிலை அச்சுகள், ஆயங்கள் (எக்ஸ், ஒய் அச்சுகள்)

Axes of reference — குறிட்பீட்டச்சுகள்
Axis அச்சு, ஆயம்
Axis major — பேரச்சு நெட்டச்சு
Axis minor — சிற்றச்சு, குற்றச்சு
Axis transverse — குறுக்கச்சு
Axis of symmetry — சமச்சீரச்சு

B

Binomial theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bisect — இருசமக் கூறிடு
Bisector — இருசம வெட்டி
Bisector external — வெளியிடு சமவெட்டி
Bisector internal — உள்ளிரு சமவெட்டி
Bisector perpendicular — செங்குத்து இருசம வெட்டி மையக் குத்துக்கோடு

C

Calculate — கணக்கீடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Calculus — நுண் கணிதம்
Calculus differential — வகை நுண் கணிதம்
Calculus integral — தொகை நுண் கணிதம்
Cartesion co-ordinates — கார்டீசியன் ஆயத் தொலைகள்
Centroid — திணிவு மையம், ஈர்ப்பு மையம்
Centroid (of a triangle) — மையக் கோட்டுச் சந்தி, நடு கோட்டு மையம்
Chord — நாண்
Chord common — பொது நாண்
Chord focal — குவிய நாண்
Chord of contact — தொடு நாண்
Circle — வட்டம்
Circle auxiliary — துணை வட்டம்
Circle circumscribed — சுற்று வட்டம்
Circle concentric — ஒரு மைய வட்டம், பொது மைய வட்டம்

Circle director	— குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம்
Circle inscribed	— உள் தொடு வட்டம்
Circle orthogonal	— குத்து வட்டம், செங்குத்து வட்டம்
Circle power of a point w.r.t.	— புள்ளியின் வர்க்கம், புள்ளியின் படி
Circle segment of a	— வட்டத் துண்டு
Circum centre	— சுற்று மையம்
Circum circle	— சுற்று வட்டம்
Circumference	— பரிதி, சுற்றளவு, வட்டவரை
Circumscribe	— சுற்று வரை
Clock-wise	— வலஞ்சுழியாக
Coincide	— பொருந்து, பொருத்து, ஒன்று படு, ஒரே இடத்தில் இணை
Complex number	— கலப்பெண், சிக்கலெண்
Complex plane	— சிக்கற்றளம், கலப்பெண் தளம்
Complex quantity	— சிக்கற் கணியம், கலப்புக் கணியம்
Complex root	— சிக்கல்மூலம், கலப்புமூலம்
Complex variable	— சிக்கல் மாறி
Complex nth roots of unity	— ஒன்றின் n-ஆம் கலப்பு எண் மூலங்கள்
Componendo et dividendo	— கூட்டல் கழித்தல் விகிதசமம், கூட்டுக்கழி
Condition	— நிபந்தனை
Conic	— கூம்பு வளைவு, இருபடி வரை
Conjugate	— இணையிய, இணை
Conjugate complex number	— இணைச் சிக்கலெண், இணைக் கலப்பு எண்
Conjugate diameters	— இணை விட்டங்கள்
Conjugate lines	— துணையியக் கோடுகள்
Conjugate numbers	— இணை எண்கள்
Conjugate roots	— இணை மூலங்கள்
Conjugate system	— இணைத் தொகுதி
Constant	— மாறா, மாறாத மாறிலி, நிலையெண்

Constant of integration	—	தொகையீட்டு நிலையெண்
Contact external	—	வெளித் தொடுகை
Contact internal	—	உட்தொடுகை
Contact point of	—	தொடுபுள்ளி
Converse	—	மறுதலை
Co-ordinate geometry	—	ஆயத் தொலை வடிவ கணிதம்
Co-ordinates	—	ஆயத் தொலைகள்
Co-cartesion	—	கார்டீசியன் ஆயத் தொலைகள்
Current co-ordinates	—	நடப்புக்கூறுகள், நடப்பு ஆயத் தொலைகள்
Curve	—	வளைவு, வளைகோடு, வளைவரை

D

Definite	—	வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட
Definite integral	—	வரையறுத்த தொகையீடு
Definite integration	—	வரையறுத்து தொகையிடுதல்
Definition	—	வரைவிலக்கணம், வரையறை
Degree of an equation	—	சமன்பாட்டுப் படி
Derivative	—	வகைக்கெழு
Derivative of a function	—	ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு
Diagonal	—	மூலைவிட்டம்
Diameter	—	விட்டம்
Differential calculus	—	வகை நுண்கணிதம், வகையீட்டு நுண்கணிதம்
Differential coefficient	—	வகையீட்டுக் குணகம், வகைக்கெழு. வகையீட்டுக்கெழு
Differentiate	—	வகையீடு, வகையீடு காண்
Differentiate Y with respect to X	—	X-ஐக் குறித்து Y-ஐ வகையிடுக
Differentiation	—	வகையிடல்
Differentiation logarithmic	—	மடக்கை வகையீடு
Differentiation successive	—	அடுத்தடுத்து வகைக்கெழு காணல், தொடர்ந்து வரும் வகையீடு
Direct common tangent	—	நேர்ப்பொதுத் தொடுகோடு

Director circle — குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்
Directrix — இயக்குரை

E

Eccentric angle — மையவகற்சிக் கோணம்
Elementary — தொடக்கத்துக்குரிய
Eliminate — நீக்கு, விளக்கு
Equal — சமன், சமம்
Equation — சமன்பாடு
Equation homogeneous — சமபடித்தான சமன்பாடு
Equation quadratic — இருபடிச் சமன்பாடு
Expression — கோவை
Expression homogeneous — சமபடித்தான கோவை
External bisector — வெளியிரு சமவெட்டி
Extremities — முனைப்புள்ளிகள்

F

Factor — காரணி
Factorisation — காரணிப்படுத்தல், காரணி காணல்
Finite — முடிவுள்ள
Focal chord — குவியநாண்
Focal distance — குவியதூரம்
Foci — குவியங்கள்
Fraction — பின்னம்
Fraction partial — பகுதி பின்னம்
Frame of reference — குறியீட்டச்சு
Function — சார்பு
Function even — இரட்டைச் சார்பு
Function homogeneous — சமபடிச் சார்பு
Function hyperbolic — அதிபரவளைச் சார்பு
Function inverse — நேர்மாறு சார்பு
Function manyvalued — பன்மதிப்புடைச் சார்பு
Function odd function — ஒற்றைச் சார்பு
Function rational — விகிதமுறு சார்பு

Function trigonometrical — திரிகோண கணிதச் சார்பு
Functional relation — சார்புடைத் தொடர்பு

G

General solution — பொதுத் தீர்வு
Geometric progression — பெருக்குத் தொடர்
Gradient — சாய்வு விகிதம், சரிவு

H

Homogeneous — சமபடித்தான
Homogeneous function — சமபடித்தான சார்பு
Horizontal — கிடை
Hyperbola — அதிபரவளைவு
Hyperbolic function — அதிபரவளைச் சார்பு
Hypothesis — எடுகோள்

I

Indentical — சர்வசம, முழுவதும் ஒத்த
Imaginary — கற்பனையான
Imaginary number — கற்பனை எண்
Imaginary part of a complex — ஒரு கலப்பு எண்ணின் கற்பனைப் பகுதி
Imaginary points — கற்பனைப் புள்ளிகள்
Imaginary quantities — கற்பனைக் கணியங்கள்
Imaginary root — கற்பனைமூலம்
Infinite — முடிவில்லாத, கந்தழி
Infinity — முடிவிலி, எண்ணிலி
Infinity point at — முடிவிலிப்புள்ளி
Initial line — தொடக்கக்கோடு, முதல்கோடு
Integer — முழுவெண்
Integral — தொகை
Integral definite — வரையறுத்த தொகை, வரையுட்படு தொகை
Integral indefinite — வரையறுத் தொகை
Integral calculus — தொகை நுண்கணிதம்

Integrand — தொகைச் சார்பு
Integrate — தொகை காண்
Integrating factor — தொகையீட்டுக் காரணி
Integration — தொகையிடல், தொகை காணல்
Integration numerical — எண்வழித் தொகை காணல்
Integration term by term — தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல்
Integration by parts — பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல்
Integration by partial fraction — பகுதிப் பின்ன முறையில் தொகையிடல், பகுத்துத் தொகை காணல்
Integration by substitution — பிரதியீட்டுத் தொகை காணல்
Interior angle — உள்கோணம்
Internal bisector — உள்ளிரு சமவெட்டி
Intersect — வெட்டு
Point of intersection — வெட்டுப் புள்ளி
Interval — இடைவெளி
Invariable — மாற்றமில்லாத, மாருத
Inverse — நேர்மாருன
Inverse function — நேர்மாறு சார்பு
Irrational — விகிதமுருத
Irrational roots — விகிதமுருத மூலங்கள்
Isosceles — இருசமபக்க
Isosceles trapezium — இருசமபக்கச் சரிவகம்
Isosceles triangle — இருசமபக்க முக்கோணம்

L

Limit — எல்லை, வரம்பு
Limit lower — கீழ் எல்லை
Limit upper — மேல் எல்லை
Line — கோடு, வரி, வரை
Line straight — நேர்கோடு
Line vertical — குத்துக்கோடு

Line of centres — மையப் பிணைகோடு
Locus — நியமப்பாதை
Logarithm — மடக்கை

M

Minus sign (−) — எதிர்க்குறி, கழித்தல்குறி
Modulus — மட்டு
Modulus of a complex — ஒரு கலப்பு எண்ணின் மட்டு

N

Negative — குறை, எதிர்
Negative sign — எதிர்க்குறி
Normal to a curve — வரைச் செங்கோடு
Notation — குறீயீடு, குறியீட்டுமுறை
Number — எண்
Complex — கலப்பு எண், சிக்கலெண்
Even Number — இரட்டை எண்
Fractional — பின்ன எண்
Number, imaginary — கற்பனை எண்
Irrational — விகிதமுருவெண்
Odd — ஒற்றை எண்
Real — மெய் எண்
Numerator — தொகுதி, தொகுதியெண்

O

Operator — செயலி
Order — வரிசை
Origin — ஆதி
Orthocentre — செங்குத்து மையம்
Orthogonal — செங்குத்தான
Orthogonal circles — குத்துவட்டங்கள்

P

Pair — சோடி
Parabola — பரவளைவு
Parallel — சமாந்தர, இணை

Parallelogram — இணைகரம்
Parameter — துணையலகு
Parametric equation — துணையலகுச் சமன்பாடுகள்
Parametric co-ordinates — துணையலகுக் கூறுகள்
Part — பகுதி
Partial fraction — பகுதிப் பின்னம்
Perimeter — சுற்றளவு, பரிதி
Perpendicular — செங்குத்தான, செங்குத்து
Plane — தளம்
Point — புள்ளி
Point at infinity — முடிவிலிப்புள்ளி, கந்தழிப்புள்ளி
Pole — முனைவு, துருவம், இசைப்புள்ளி
Pole of a line — (கோட்டின்) புள்ளி
Positive — நேர், மிகை
Positive number — நேரெண், கூட்டெண், மிகையெண்
Primitive — மூலம்
Principal axis — தலையாய அச்சு
Pricipal — தலையாய, முதல்
Principle — தத்துவம்
Product — பெருக்கம், பெருக்கல் பலன்
Progression — விருத்தி, தொடர்
Proof — நிறுவல்
Property — தன்மை, பண்பு
Proportional — விகிதசமமான, விகிதசமன்

Q

Quadrant — காற்பகுதி
Quantity — கணியம்
Quantity known — தெரிந்த கணியம்
Quantity unknown — தெரியாக் கணியம்

R

Radian — ஆரையன்
Radical axis — சமத்தொடு அச்சு

Radical centre — சமத்தொடு அச்சுச் சந்தி
Ratio — விகிதம்
Rational — விகிதமுறுகின்ற
Real — மெய்யான
Reciprocal — தலைகீழான, தலைகீழ்
Rectangle — செவ்வகம்
Regular polygon — ஒழுங்குப் பல்கோணம்
Root — மூலம்
Root cube — கனமூலம், முப்படி மூலம்
Root extraneous — புறம்பான மூலம்
Root imaginary — கற்பனை மூலம்
Root rational — விகிதமுறு மூலம்
Root real — மெய்மூலம்
Root square — வர்க்கமூலம்
Rotation — சுழற்சி
Rule — விதி

S

Series — தொடர்ச்சி, தொடர் முறை
Series infinite — முடிவில்லாத் தொடர்
Series summation of — தொடர் கூட்டல்
Sign — குறி, அடையாளம்
Similar — வடிவொத்த
Solution — தீர்வு
Standard form — நியம வடிவம்
Substitute — பிரதி, பிரதியிடுதல்
Substitution — பிரதியீடு
Subtend — எதிர்கொள்
Suffix — கீழ்க்குறி
Sum — தொகை, கூட்டுத்தொகை கூட்டுப் பலன்
Summation — கூட்டல்
Summation by parts — பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல்
Summation of series — தொடர் கூட்டல்
Symmetry — சமச்சீர்